Fakultät für Bauingenieurwesen und Umwelttechnik

Mathematikvorkurs
für Studienanfänger

Autoren:

Dipl.-Ing. Kristina Hahne

Dipl.-Ing. Dieter Herbeck

Tobias Höller, M.Eng.

Prof. Dr.-Ing. Johannes Lange

Prof. Dr.-Ing. Ansgar Neuenhofer

Prof. Dr.-Ing. Knud Sauermann

Dipl.-Ing. Ernst-Jürgen Wilke

WS 2024/2025

Technology
Arts Sciences
TH Köln

Vorwort

Das vorliegende Skript ist aus dem Mathematikvorkurs entstanden, der an der Fakultät für Bauingenieurwesen und Umwelttechnik der Technischen Hochschule Köln seit dem Wintersemester 2016/2017 angeboten wird. Als angehende Bauingenieurin oder angehender Bauingenieur benötigen Sie ein mathematisches Grundverständnis zur Lösung von alltäglichen Aufgaben des Bauingenieurwesens. Ohne dieses Grundverständnis ist der Start in das Studium des Bauingenieurwesens deutlich erschwert.

Das vorliegende Skript soll die mathematischen Defizite zwischen vorhandenem Schulwissen und den Anforderungen des Bauingenieurstudiums überbrücken. Die Inhalte dieses Skriptes orientieren sich an Studierenden mit geringem mathematischem Grundwissen, die durch entsprechenden Einsatz und Motivation Ihre Wissenslücken füllen können.

Dieses Skript steht den Studierenden bereits nach der Einschreibung zum Download zur Verfügung. Sollten bei der Lektüre dieses Skriptes Themen auftauchen, die in der Schule nicht gelehrt wurden (z.B. trigonometrische Funktionen, Logarithmen, …) müssen diese schnellstmöglich nachgeholt werden Die Studierenden haben somit schon in der Zeit vor dem offiziellen Beginn der Lehrveranstaltungen Gelegenheit Wissenslücken aufzuarbeiten. Alles in diesem Skript wird zum Studienbeginn als bekannt vorausgesetzt!

Die zugehörigen Vorlesungsveranstaltungen finden täglich vormittags im Rahmen des sogenannten Sonderstundenplanes statt. Im Anschluss an die Vorlesungsveranstaltung sind die Studierenden angehalten, die Übungsaufgaben in diesem Umdruck in Eigenarbeit zu lösen. Dazu stehen den Studierenden die folgenden Räumlichkeiten zur Verfügung:

- jeder freie Raum (EG und 2. Etage),
- Lernraum im Treppenhaus 2. Etage (Raum 204),
- Glaskasten im EG,
- Bibliothek, Mensa, Wiese mit Rheinblick…

Voraussetzung für einen erfolgreichen Abschluss des Mathematikvorkurses ist ein regelmäßiges Mitarbeiten, konsequentes Lösen der Übungsaufgaben und die Selbstkontrolle der Rechenwege über bekannte Lösungsverfahren. Dazu empfehlen wir die Einrichtung von sogenannten Lernteams oder die Nutzung von mathematischen Internetportalen wie z. B. OMB-Plus, WolframAlpha (www.wolframalpha.com)... Ansonsten stehen Ihnen die Lehrenden rund um die Veranstaltung sowie Herr Höller für Sprechstunden (siehe Stundenplan) zur Verfügung.

Die Abschlussprüfung zu dem Mathematikvorkurs findet an dem zweiten Donnerstag des Sonderstundenplans im laufenden Wintersemester statt. Der genaue Ablauf wird rechtzeitig bekanntgegeben. Erscheinen Sie pünktlich! Viele weitere Informationen zu der Prüfung finden Sie ganz am Ende dieses Skriptes!

Nach Veröffentlichung der Klausurergebnisse kann jeder Studierende anhand der erreichten Punktzahl für sich selbst einschätzen, ob eine weitere Einarbeitung notwendig ist. Wir hoffen damit unseren Studierenden einen ersten Einstieg in das Bachelorstudium Bauingenieurwesen ermöglicht zu haben und wünschen Ihnen zum Studienbeginn viel Erfolg. Weitere Informationen finden Sie unter dem folgenden Link:

www.th-koeln.de/BauIngErsti

Inhalt

1 Reelle Zahlen

Prof. Dr.-Ing. Knud Sauermann

1.1 Zahlenmengen

Die Grundlage aller Rechenvorgänge im Laufe Ihres Bauingenieurstudiums sind die reellen Zahlen. Im Rahmen einer Einführung werden im ersten Schritt eine Übersicht der Zahlenmengen sowie deren gegenseitige Abgrenzung vorgestellt:

Natürliche Zahlen:	$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$
Natürliche Zahlen einschließlich der Null:	$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
Ganze Zahlen:	$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
Rationale Zahlen:	$\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} \middle| m, n \in \mathbb{Z};\ n \neq 0\right\}$
Reelle Zahlen:	$\mathbb{R}$
Komplexe Zahlen:	$\mathbb{C}$

Zwischen den hier aufgeführten Zahlenmengen besteht der folgende Zusammenhang:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

1.2 Reelle Zahlen

Auf der Zahlenmenge der reellen Zahlen sind die Grundrechenarten (Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division) begründet. Dabei werden die reellen Zahlen in rationale und irrationale Zahlen unterteilt:

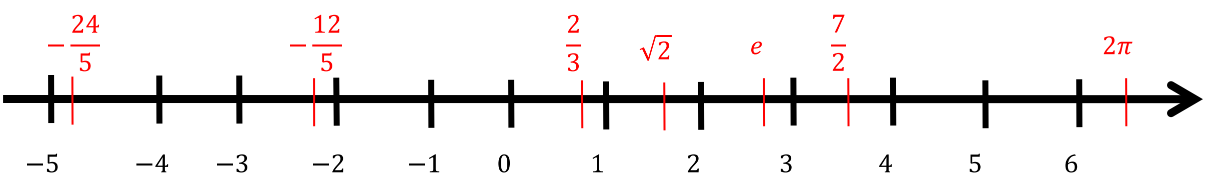
– rationale Zahlen:

$$\left.\begin{array}{c} 3 = 3{,}0000000\ \dots \\ 6{,}14 = 6{,}14000\ \dots \\ 3{,}76 = 3{,}75999\ \dots = 3{,}75\overline{9} \\ \dfrac{1}{3} = 0{,}33333\ \dots = 0{,}\overline{3} \end{array}\right\} \quad \text{endlich oder unendlich periodisch}$$

– irrationale Zahlen:

$$\left.\begin{array}{c} \sqrt{2}, e, \pi \\ 0{,}5050050005000050000005\ \dots \end{array}\right\} \quad \text{unendlich und nichtperiodisch}$$

Möchte man die reellen Zahlen grafisch darstellen, so bedient man sich der sogenannten Zahlengerade oder dem Zahlenstrahl:



1.3 Körper der reellen Zahlen

Sind die im folgenden aufgeführten Einzelaxiome erfüllt, so spricht man von dem Körper der reellen Zahlenmenge.

Hinsichtlich der Addition gelten folgende Axiome:

(A1)	$a, b \in \mathbb{R}$	➔	$(a+b) \in \mathbb{R}$	**abgeschlossen**
(A2)	$a, b \in \mathbb{R}$	➔	$a+b=b+a$	**kommutativ**
(A3)	$a, b, c \in \mathbb{R}$	➔	$(a+b)+c=a+(b+c)$	**assoziativ**
(A4)	Es gibt genau *eine* Zahl $0 \in \mathbb{R}$, so dass $a+0=a$ für *alle* $a \in \mathbb{R}$ gilt.			**neutrales Element**
(A5)	Für *alle* $a \in \mathbb{R}$ gibt es genau *ein* $(-a) \in \mathbb{R}$, so dass $a+(-a)=0$ gilt.			**inverses Element**

Die reellen Zahlen werden hinsichtlich der Addition auch als kommutative Gruppe bezeichnet.

Hinsichtlich der Multiplikation gelten folgende Axiome:

(M1)	$a, b \in \mathbb{R}$	➔	$(a \cdot b) \in \mathbb{R}$	**abgeschlossen**
(M2)	$a, b \in \mathbb{R}$	➔	$a \cdot b = b \cdot a$	**kommutativ**
(M3)	$a, b, c \in \mathbb{R}$	➔	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	**assoziativ**
(M4)	Es gibt genau *eine* Zahl $1 \in \mathbb{R}$, so dass $a \cdot 1 = a$ für *alle* $a \in \mathbb{R}$ gilt.			**neutrales Element**
(M5)	Für *alle* $a \in (\mathbb{R}\backslash\{0\})$ gibt es genau *ein* $\frac{1}{a} = a^{-1} \in \mathbb{R}$, so dass $a \cdot \frac{1}{a} = 1$ gilt.			**inverses Element**

Die reellen Zahlen $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ werden hinsichtlich der Multiplikation als kommutative Gruppe bezeichnet.

(D)	$a, b \in \mathbb{R}$	➔	$a \cdot (b+c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$	**distributiv**

Einige Rechenregeln und Konventionen:

	$a - b = a + (-b)$	Differenz
$b \neq 0$	$a \div b = \frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b} = a \cdot b^{-1}$	Quotient
Konsequenz:	$0 \cdot a = 0$ für alle $a \in \mathbb{R}$	
$b \neq 0, c \neq 0$	$\frac{a}{b} = \frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{c} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$	Erweitern
$b \neq 0, d \neq 0$	$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$	Produkt
$b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0$	$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$	Quotient
$b \neq 0, d \neq 0$	$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d \pm c \cdot b}{b \cdot d}$	Summe/Differenz

1.4 Betrag einer reellen Zahl

Sei $a \in \mathbb{R}$, so versteht man unter dem Betrag einer Zahl a den Abstand zwischen der Zahl a und der Zahl 0.

Es gilt: $|a| \geq 0$

Der Betrag einer Zahl a ist stets positiv mit folgenden Eigenschaften:

$$|a| \begin{cases} a, \text{für } a \geq 0 \\ -(a), \text{für } a < 0 \end{cases}$$

Es gelten folgende Rechenregeln:

$$0 \le |a| \qquad \text{für alle } a \in \mathbb{R}$$

$$|a| = 0 \iff a = 0$$

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b| \text{ und } \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}, \qquad b \neq 0$$

$$|a \pm b| \le |a| \pm |b| \qquad \Delta\text{ - Ungleichung}$$

1.5 Intervalle der reellen Zahlen

Im Folgenden werden die wichtigsten Intervalle der reellen Zahlen zusammengefasst, die auch als Teilmengen der reellen Zahlen interpretiert werden können.

Die sogenannten endliche Intervalle basieren auf: $a < b$

$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$  **offenes Intervall**

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$  **abgeschlossenes Intervall**

$(a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\}$ 

$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\}$ 

Die unendlichen Intervalle lauten:

$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$ 

$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$ 

$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$ 

1.6 Aufgaben

A1.1. Vereinfachen Sie soweit wie möglich

a) $\big(a - (b - (a + b) - a)\big) =$

b) $(4a + 3b)(4a - 3b) =$

A1.2. Kürzen Sie soweit wie möglich

a) $\frac{36}{180} =$

b) $\frac{xyz + x^2yz + xyz^2}{xy^2z} =$

A1.3. Vereinfachen Sie soweit wie möglich

a) $\frac{1-x}{1-\sqrt{x}} =$

b) $\frac{7x^6 + x^2}{x^6 + \frac{1}{7}x^2} =$

A1.4. Mengenlehre

$\mathbb{A} = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ $\mathbb{B} = \{3, 6, 9\}$

a) $\mathbb{A} \cup \mathbb{B} =$

b) $\mathbb{A} \cap \mathbb{B} =$

c) $\mathbb{A} \setminus \mathbb{B} =$

A1.5. Lösen Sie die Wurzelgleichung nach x auf: $\sqrt{x+36} = \sqrt{x+3} + \sqrt{x-4}$

A1.6. Lösen Sie die folgende Gleichung: $\frac{|x-3|}{x+3} = 2$

A1.7. Ordnen Sie die folgenden Zahlen in aufsteigender Reihenfolge an

a) 5; -2, 0; -100; - 50

b) -5; 2; -2; 0; 5; 7; -100; 100

c) 3/10; -20; -5/2; 1; -15/-3

A1.8. Berechnen Sie x

a) $\frac{x+1}{15} + \frac{2x-10}{5} = 3 - \frac{3x-16}{3}$

b) $\frac{2x+1}{x-1} + \frac{2x+4}{1-x} + \frac{2x-9}{x^2-1} = \frac{4-8x}{1-x^2}$

c) $\frac{x-4}{2x-1} + \frac{2x+1}{x+4} = \frac{4}{3}$

A1.9. Löse nach g auf: $\frac{2}{d} + \frac{2d}{3} = \frac{1}{g} - 3$

A1.10. Löse nach y auf: $\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$

A1.11. Vereinfachen Sie die folgenden Brüche soweit wie möglich:

a) $\frac{x-4}{2x-1} - \frac{3x-5}{x+2} + \frac{5x^2}{2x^2+3x-2}$

b) $\frac{1}{a-1} - \frac{4}{1-a} - \frac{8}{1+a} + \frac{3a+7}{a^2-1}$

A1.12. Berechnen Sie

a) $\frac{2}{5} + \frac{5}{6}$

b) $\frac{9}{16} \cdot \frac{48}{81} \cdot \frac{3}{10}$

c) $\frac{12}{13} + \frac{4}{13} - \left(\frac{1}{13} + \frac{7}{13}\right)$

d) $\frac{4}{7} \div 3\frac{6}{9}$

A1.13. Berechnen und vergleichen Sie

a) $|-63 + (-14)|$

b) $|-63| + |-14|$

c) $|-3{,}5 \cdot (-10)|$

d) $|-3{,}5| \cdot |-10|$

A1.14. Berechnen Sie folgende Ausdrücke

a)

$$\sum_{n=0}^{5}(n^2+1)$$

b)

$$2\cdot\sum_{v=0}^{5}\left(\frac{1}{v+1}\right)$$

2 Einheiten und Vektoren

Prof. Dr.-Ing. Johannes Lange

2.1 Einheiten

Geometrische und **physikalische Größen** werden in **Maßeinheiten** (auch Größeneinheit oder physikalische Einheit) angegeben, die einen eindeutigen (in der Praxis feststehenden, wohldefinierten) Wert haben. Alle anderen Werte der jeweiligen Größe werden als Vielfache der Einheit angegeben. Bekannte Maßeinheiten sind beispielsweise **Meter, Sekunde, Kilowattstunde, Hertz** oder **Kilometer pro Stunde**[1].

Einheiten werden zusammengesetzt aus den folgenden **Basiseinheiten** (**Internationale Einheitensystem** oder **SI** (frz. *Système international d'unités*)):

Name	Meter	Kilogramm	Sekunde	Ampere	Kelvin	Mol	Candela
Symbol	m	Kg	S	A	K	Mol	cd
Einsatz	Strecke	Gewicht	Zeit	Strom-stärke	Tempera-tur	Stoff-menge	Licht-stärke

Diese Basiseinheiten werden ergänzt durch

- Kombinationen oder Ableitungen z.B. **Km/h** und
- Vorsatzzeichen
  - Kilo, Mega, Giga, Tera ←→ Centi, Milli, Mikro, Nano, Pico

Nach DIN 5008 wird ein Leerzeichen zwischen Einheit und Zahl geschrieben:

z.B.: **100 Km/h** oder **200 MN/m²**

Das Rechnen mit Einheiten beschränkt sich auf wenige Regeln. Werden diese konsequent eingehalten, lassen sich viele Ingenieuraufgaben lösen und vor allem kontrollieren.

(1) Umrechnungsfaktoren:

- Viele Einheiten werden in Stufen verwendet z.B. die Länge in Meter:

  (z.B. Kilometer, Zentimeter, Millimeter, Mikrometer, Nanometer, Picometer)

  Hier ist die Anzahl der Nullen bzw. der Nachkommastellen zu zählen.

  1 Km = 1000 m; 1 m = 100 cm; 1 cm = 10 mm usw. oder kombiniert
  1 Km = 1000 m = 100.000 cm = 1.000.000 mm usw.
  1 t = 1000 kg; 1 Kg = 1000 g

- Sonderformen für Zeit und Datenmengen

  1 a = 365 d; 1 d = 24 h; 1 h = 60 min; 1 min = 60 s
  1 a = 365 * 24 * 60 * 60 s = 31.536.000 s
  Oder 1 Byte = 8 Bit; 1024 Byte = 1 KByte …

[1] Quelle: Wikipedia

(2) Potenzen

Es gibt viele Einheiten auch in einer höheren Dimension z.B. $m \cdot m = m^2$ oder $m \cdot m \cdot m = m^3$. Bei Berechnungen können sogar zunächst sinnlose Potenzen entstehen, z.B. die Varianz in der Statistik: $€^2$. Das Endergebnis einer Berechnung sollte natürlich wieder etwas ergeben, dass Sinn macht.

(3) Mal und Durch

Mit Einheiten wird genauso gerechnet wie mit den dazugehörigen Zahlen:
z.B. der Druck p auf die Fläche $A = 10\ m^2$ mit der Kraft $F = \ 2\ KN$:

$$p = \frac{F}{A} = \frac{2\ KN}{10\ \ m^2}$$

Das Ergebnis lässt sich weiter umrechnen, da N(ewton) auch geschrieben werden kann als $\frac{Kg \cdot m}{s^2}$ und schließlich gekürzt werden kann:

$$p = \frac{F}{A} = \frac{2\ KN}{10\ \ m^2} = \frac{2.000\ Kg \cdot m}{10\ \ m^2 \cdot s^2} = \frac{2.000\ Kg}{10\ \ m \cdot s^2} = 200\ kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-2} = 200\ N \cdot m^{-2} = 200\ Pa\ (Pascal)$$

Beispiel - Aufgaben:

1. Ein Schwimmbecken ist 25 m * 10 m * 2 m groß.

   a) Wie schwer ist die Wasserfüllung?
   b) Wie viele Liter Wasser passen hinein?

   Rechnung: (Sie sollten wissen: 1 l Wasser wiegt 1 kg)

   1 l = 1 dm^3 = 10 cm * 10 cm * 10 cm

   25 m * 10 m * 2 m = 250 dm * 100 dm * 20 dm = 250*100*20 dm^3= <u>500.000 l</u>

   = 500.000 kg = <u>500 t</u>

2. Wieviel cm^3 passen in 2 m^3?

   Rechnung:

   2 m^3 = 2 (m)^3 = 2 (100 cm)^3 = 2 (100^3 cm^3) = 2 (100*100*100 cm^3)

   = 2 (1.000.000 cm^3) = <u>2.000.000 cm^3</u>

3. Einheiten umrechnen: 2 m/s sind umgerechnet wieviel Km/h?

   Rechnung:
   $1\ m = \frac{1}{1000}\ Km \quad \& \quad 1\ s = \frac{1}{60}\ Min \quad \& \quad 1\ Min = \frac{1}{60}\ h$

   $$2\frac{m}{s} = 2\frac{\frac{1}{1000}\text{Km}}{\frac{1}{60}Min} = 2\frac{\frac{1}{1000}\text{Km}}{\frac{1}{60}\cdot\frac{1}{60}h} = 2\frac{\frac{1}{1000}\text{Km}}{\frac{1}{3600}h} = 2\frac{3600\ Km}{1000\ h} = 2 \cdot 3{,}6\frac{Km}{h} = 7{,}2\ Km/h$$

4. Sonderformen: 1 Jahr hat wie viele Sekunden?

   1 a = 365 d = 365 * 24 h = 365 * 24 * 60 Min = 365 * 24 *60 * 60 s = 31.536.000 s

5. 1 GB sind wieviel Byte?

   1 GB =1024 MB = 1024 * 1024 KB = 1024 * 1024 * 1024 Byte = 2^30 Byte

6. Bauwesen: Hooksches Gesetz: $\boldsymbol{\varepsilon = \frac{1}{E} \cdot \frac{F}{A}}$. Berechnen Sie die Dehnung mit folgenden Parametern:
   $F = 200\ KN; A = 10\ mm^2; E = 100\frac{KN}{mm^2}$

   $\varepsilon = \frac{1}{100\frac{KN}{mm^2}} \cdot \frac{200\ KN}{10\ mm^2} = 0{,}2$ [ ] Die Dehnung hat keine Einheit.

2.2 Maßstab

Baupläne oder Karten werden in einem Maßstab gezeichnet. Dieser bezeichnet den (meist) Verkleinerungsfaktor der Zeichnung. Z.B. ist ein Bauplan mit **1:50** gezeichnet, bedeutet dies, dass eine Strecke von 1 cm auf der Zeichnung 50 cm in Realität entspricht.

Andersherum: Sie messen die Länge einer Wand in einem Plan mit 60 mm. Wieviel Meter ist die Wand in Realität lang?

1 cm auf dem Plan ≅ 50 cm in Realität

also:

60 mm auf dem Plan ≅ $50 \cdot 60\ mm$ in Realität

$$50 \cdot 60\ mm = 3000\ mm = 300\ cm = 3{,}0\ m$$

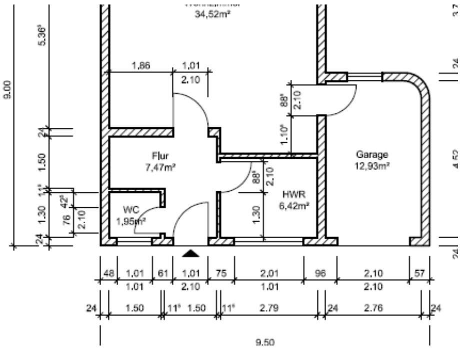


Abbildung 1 Grundriss © TH Köln

2.3 Aufgaben Einheiten und Maßstab

A2.1. In eine Kiste mit den Maßen 1m*1m*1m werden Pflastersteine mit den Maßen

a) 10 cm*10 cm*10 cm b) 5 cm*5 cm*5 cm
verpackt. Wie viele Steine passen jeweils in die Kiste?

A2.2. Die Druckfestigkeit eines Betonfundaments beträgt 12 MN/m². Geben Sie den Wert in N/mm² an.

A2.3. 12 MN sind wie viele a) N, b) kN; c) GN?

A2.4. Sie wollen auf einer Decke ein 2 m tiefes Schwimmbad bauen. Mit wieviel kN/m² belasten Sie die Decke? Wieviel wiegt das gesamte Poolwasser, wenn er 12*3 m groß ist?

A2.5. Wie viel sind 12 Mbyte in KByte und Byte?

A2.6. Wie viele Stunden hat das Jahr? Wie viele Minuten hat der Monat September?

A2.7. Ein Auto fährt 100 Km/h, wieviel Strecke hat es in 10 Sekunden zurückgelegt?

A2.8. Bei einem Fundament wird die maximale Bodenpressung mit 300 kN/m² angegeben. Berechnet haben Sie eine Belastung aus dem Fundament mit 0,25 N/mm². Passt das?

A2.9. Bei einer Rechnung erhalten Sie folgende Ergebnisse: Kürzen Sie sinnvoll:

a) $\frac{117kNms^2}{36Nm/s^2}$ b) $\frac{333\ €\ s^2kg}{111\ N\ kg\ m/s^2}$ c) $\frac{654\frac{kN}{N}m\ €^2}{321\frac{N}{kN}kg\ m/s^2}$ d) $\frac{484\ \vartheta\xi\pi\chi\varphi}{56\ \varphi\omega\sigma\vartheta\xi}$ e) $\frac{1024\frac{Otto}{Peter}\cdot Franz}{64\frac{Peter}{Otto}\cdot Franz}$ f) $\frac{222\ kN\ km\ kg}{222\ kN + 222\ kN\ km\ kg}$

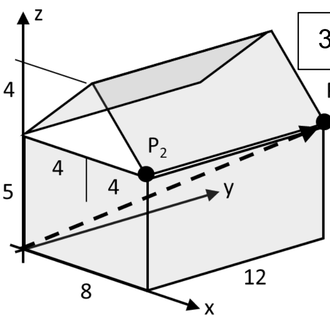
A2.10. In einer Karte mit Maßstab 1:50.000 ist ein Wanderweg 10 cm lang. Wie weit ist er?

A2.11. Sie haben ein 40 m langes Gebäude und wollen es auf einem auf einem DIN A4 Blatt darstellen. Dazu soll es 20 cm lang sein. Welchen Maßstab wählen Sie?

2.4 Vektoren

Die Vektorrechnung wird im Fach Mathematik II im 2. Semester noch ein Thema Ihres Studiums sein. Zum Start vor allem in der Anwendung in der Mechanik werden jetzt einige grundlegende Elemente vorgestellt:

3D



Zunächst *zwei Beispiele* aus dem Bauwesen:

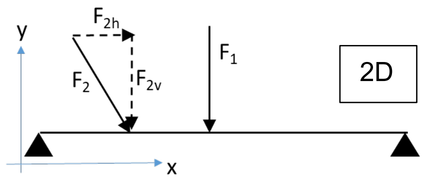
1. Der Punkt P_1 liegt im 3D-Koordinatensystem bei $P_1 = (8; 12; 5)$. Der Vektor $\overrightarrow{p_1}$ vom Ursprung („NullPunkt") zu diesem Punkt wird *Ortsvektor* genannt und verläuft diagonal durch das Gebäude. Er wird als Pfeil gezeichnet (im Bild gestrichelt) und mit Koordinaten übereinander geschrieben: $\overrightarrow{p_1} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix}$

   Aufgabe: Wie lautet der Punkt P_2 und der Ortsvektor zu P_2?

2. Einen Träger belasten zwei Kräfte (F_1, F_2), die als Vektoren dargestellt werden. In der Zeichnung sind diese in einem 2D-Koordinatensystem und werden mit den Koordinaten übereinandergeschrieben:

$$F_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ F_{1v} \end{pmatrix}; \quad F_2 = \begin{pmatrix} F_{2h} \\ F_{2v} \end{pmatrix}$$

2D



Vorsicht: In der Mathematik ist ein Vektor (parallel) verschiebbar, in der Physik bzw. Mechanik nicht. Die Position einer einwirkenden Kraft darf nicht verändert werden – ansonsten wird das mechanische System verändert.

Was macht also einen Vektor aus?

– Richtung
– Länge

Eine einzelne Zahl (z.B. die Masse eines Steins) wird *Skalar* genannt z.B. „27".

1D

2.5 Rechnen mit Vektoren

Addition und Subtraktion

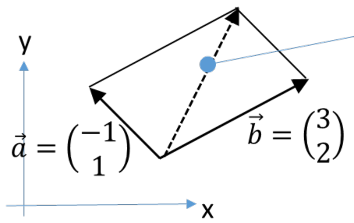
(+ -) : z.B.: mit $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$+: \; \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 \\ 2+2 \\ 3+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$-: \; \vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-0 \\ 2-2 \\ 3-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Und ein Beispiel für Addition:

2D



Resultierende Kraft

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Und eins für Subtraktion:

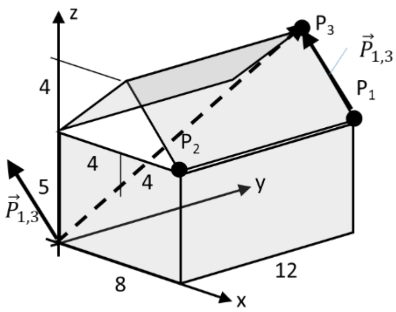
3D

Gesucht ist der Vektor $\overrightarrow{P_{1,3}}$ zwischen P_1 und P_3. (Darf auch in den Ursprung verschoben werden.

$P_1 = (8; 12; 5)$; $P_3 = (4; 12; 9)$

Vektor zischen zwei Punkten ist die Differenz der Ortsvektoren von der Spitze zum Fuß:

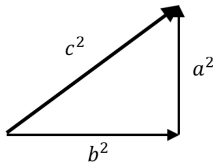
$$\overrightarrow{P_{1,3}} = P_3 - P_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$



„*Vektorlänge*", Betrag des Vektors, oder: Wie lang ist denn ein Vektor(pfeil)?

Beispiel: Ein Seil wird diagonal durch das Haus gespannt vom Ursprung zu Punkt P_3 (Gestrichelter Vektor). Gesucht Vektor und Länge:

$$\overrightarrow{p_{quer}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 9 \end{pmatrix}$$



$a^2 + b^2 = c^2$

Länge: Betrag:

$$\left| \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 9 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{4^2 + 12^2 + 9^2} = \sqrt{16 + 144 + 81} = \sqrt{241} = 15{,}52$$

Satz des Pythagoras, auch n-Dimensional

Multiplikation

- Multiplikation mit einem Skalar z.B. $\overrightarrow{p_{quer}} \cdot 2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 9 \end{pmatrix} \cdot 2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 24 \\ 18 \end{pmatrix}$

  Das Haus verdoppelt seine Größe – der Vektor verlängert sich um den Faktor 2 in der gleichen Richtung.

In der Vektorrechnung gibt es weitere Berechnungsmethoden, schon die Multiplikation wird durch Skalarprodukt und Kreuzprodukt erweitert. Es stellt sich die Frage ob Vektoren in die gleiche Richtung verlaufen (kollinear) oder in einer Ebene liegen (komplanar), ob diese linear abhängig sind. Es folgen geometrische Berechnungen, die in aktuellen CAD und 3D-Programmen eingesetzt werden. Also auf ins 2. Semester…

2.6 Aufgaben Vektorrechnung

A2.12. Vektorrechnung Grundlagen

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie folgende Teilaufgaben: Beachten Sie, dass nicht alle lösbar sind.

a) $\vec{a} + \vec{b}$ und $\vec{c} + \vec{d}$

b) $\vec{b} - \vec{a}$ und $\vec{d} - \vec{c}$

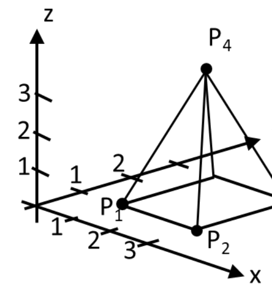
c) $\vec{a} + \vec{a} + \vec{a}$ und $3 \cdot \vec{a}$

d) $\vec{a} + \vec{c}$

e) $3 \cdot \vec{c} + 2 \cdot \vec{d}$ und $2 \cdot \vec{a} - 4 \cdot \vec{b}$

f) Längen von $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$

A2.13. Vektorrechnung



P_2

a) Nennen Sie die Ortsvektoren zu P_1 bis P_4.

b) Berechnen Sie die Vektoren von P_3 nach P_1, nach P_1 und P_3 nach P_4.

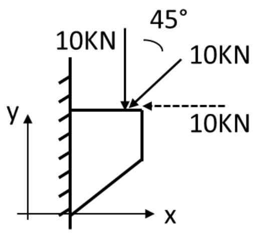
c) Wie weit ist es von P_3 nach P_1 und von P_3 nach P_4.

A2.14. Vektorrechnung

Ein Auflager für eine Kranschiene wird

a) durch zwei Kräfte (vertikal und diagonal) mit je 10 kN belastet.

b) durch drei Kräfte (vertikal, diagonal und horizontal) belastet.



Berechnen Sie jeweils den Vektor und den Betrag der resultierenden Kraft.

3 Potenzen und Logarithmen

Dipl.-Ing. Kristina Hahne

3.1 Potenzen

Eine Sonderform der Multiplikation, in der mehrere gleiche Faktoren miteinander multipliziert werden, wird als neue Rechenart definiert. Es handelt sich dabei um die **Potenzrechnung.**

Unter der x-ten Potenz einer beliebigen reellen Zahl a versteht man das x-fache Produkt von a mit sich selbst. Das bedeutet, unter der Potenz a^x versteht man also das Produkt von x gleichen Faktoren a:

$$a^x = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \cdot a = \mathrm{b}$$

Man liest: „a hoch x ist b“. Der Rechenvorgang wird Potenzieren genannt.

Dabei heißt:
a die Basis
x der Exponent
a^x die Potenz
b der Potenzwert

Beim Potenzieren sind die Werte für a und x geben und die Unbekannte b wird ermittelt.

3.2 Wurzeln

Ausgehend von der Potenzrechnung führt die Umstellung der Gleichung $a^x = \mathrm{b}$ auf die Wurzelrechnung, auch Radizieren genannt.
Das Radizieren (Wurzelziehen) ist also die **erste Umkehrung** des Potenzierens.
Die Gleichung der Potenzrechnung und der **Wurzelrechnung** drücken denselben Sachverhalt aus; sie werden jedoch nach unterschiedlichen Größen aufgelöst.

$$\sqrt[x]{b} = a$$

Man liest: „a ist die x-te Wurzel aus b“. Der Rechenvorgang wird Radizieren genannt.

Dabei heißt:
a der Wurzelwert
x der Wurzelexponent
$\sqrt[x]{b}$ die Wurzel
b der Radikand

Beim Radizieren sind die Werte für b und x geben und die Unbekannte a wird ermittelt.

3.3 Logarithmen

Ausgehend von der Potenzrechnung führt eine weitere Umstellung der Gleichung $a^x = \mathrm{b}$ auf die Logarithmusrechnung. Das Logarithmieren ist dabei die **zweite Umkehrung** des Potenzierens.
Die Gleichung der Potenzrechnung wird hierbei nach dem Exponenten aufgelöst, wobei für dessen Berechnung eine neue Rechenart, die **Logarithmusrechnung** erforderlich wird.
Der Logarithmus von Numerus b zur Basis a gibt an, mit welchem Exponenten x die Basis a versehen werden muss, um die Zahl b zu erhalten

$$log_a(\mathrm{b}) = x$$

Man liest: „x ist der Logarithmus von b zur Basis a“. Der Rechenvorgang wird Logarithmieren genannt.

Dabei heißt: a die Basis des Logarithmus
x der Logarithmus
b der Numerus

Beim Logarithmieren sind die Werte für b und a geben und die Unbekannte x wird ermittelt.

3.4 Festlegung des Definitionsbereichs

Die Gleichungen der **Potenzrechnung**, der **Wurzelrechnung** und der **Logarithmusrechnung** stehen im direkten Zusammenhang zueinander. Sie drücken denselben Sachverhalt aus, werden jedoch nach verschiedenen Größen aufgelöst.
Daher kann der Gültigkeitsbereich der zulässigen Zahlen mit zur Hilfenahme der drei Gleichungsvarianten bestimmt werden.

- die Basis 1 in der Potenzrechnung liefert kein eindeutiges Ergebnis: $1^2 = 1$ und $1^{12} = 1$
  daher gilt die Festlegung $a \neq 1$
- auch die Basis 0 liefert in der Potenzrechnung kein eindeutiges Ergebnis: $0^2 = 0$ und $0^{12} = 0$
  daher gilt die Festlegung $a \neq 0$ und hiermit auch $b \neq 0$
- es wird definiert, dass sich aus negativen Zahlen des Radikanden keine Wurzel ziehen lässt.
  Es gilt daher: $b > 0$
- wenn definiert ist, dass $b > 0$ sei, dann ist auch $a > 0$

Der **Definitionsbereich** kann demnach wie folgt festgelegt werden:

$$\text{Zahlenwert } a \text{ mit } \boldsymbol{a > 0} \ \boldsymbol{und} \ \boldsymbol{a \neq 1} \text{ und Wert } b \text{ mit } \boldsymbol{b > 0}$$

3.5 Rechnen mit Potenzen

3.5.1 Potenzgesetze

Für die Rechnung mit Potenzen müssen **Potenzgesetze** beachtet und angewandt werden. Diese Gesetzmäßigkeiten erleichtern den allgemeinen Umgang mit Potenzen. Auch für die Bearbeitung von Exponentialgleichungen und logarithmischen Gleichungen werden die Potenzgesetze als Bearbeitungshilfe angewandt.

grundlegend geltende Regel

Als allgemein gültige Regeln werden festgelegt:

$$a^0 = 1$$

$$a^1 = a$$

Addition und Subtraktion

Potenzen mit Variablen können nur addiert oder subtrahiert werden, wenn sie in ihren Basen **und** in ihren Exponenten übereinstimmen. Ansonsten wird eine Zusammenfassung nur bei konkreten Zahlenwerten möglich.

$a^m + a^n \ bzw. \ a^m + b^m$ lassen sich nicht vereinfachen!

Multiplikation

Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, indem die Basis beibehalten und die Exponenten addiert werden.

$$a^m \cdot a^n \;=\; a^{(m+n)}$$

Potenzen mit gleichem Exponenten und unterschiedlichen Basen werden multipliziert, indem die Basen miteinander multipliziert werden und der Exponent beibehalten wird.

$$a^n \cdot b^n \;=\; (a \cdot b)^n$$

Division

Potenzen mit gleicher Basis werden dividiert, indem die Basis beibehalten und die Exponenten subtrahiert werden.

$$a^m \div a^n \;=\; \frac{a^m}{a^n} = \; a^{(m-n)}$$

Potenzen mit gleichem Exponenten und unterschiedlichen Basen werden dividiert, indem die Basen durch einander geteilt werden und der gemeinsame Exponent beibehalten wird.

$$a^m \div b^m \;= (a \div b)^m \;= \frac{a^m}{b^m} = (\frac{a}{b})^m$$

Potenz

Eine Potenz wird ein weiteres Mal potenziert, indem die Basis beibehalten wird und die Exponenten multipliziert werden. Beim Potenzieren dürfen die Exponenten miteinander vertauscht werden.

$$(a^m)^n = \; a^{(m \cdot n)} = \; (a^n)^m$$

weitere praktische Umformungen

Für eine Potenz mit negativem Exponenten kann auch der Kehrwert der Potenz mit dem entsprechend positiven Exponenten geschrieben werden.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Eine Umformung eines als Bruch geschriebenen Exponenten bietet die Schreibweise als Wurzel.

$$a^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{a} \quad bzw. \quad a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$$

3.5.2 Beispiel-Aufgabe

Auch im Arbeitsfeld des Bauingenieurs findet die Potenzrechnung Anwendung. Sie wird beispielsweise in Formeln des Fachs der Bauphysik wieder aufgegriffen.

Für die Schalldämmung wird die mittlere Masse m'_{mittel} der Bauteile mit folgender Formel ermittelt:

$$m'_{mittel} = \left[\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (m'_i)^{-2,5}\right]^{-0,4} \quad \text{in } \frac{kg}{m^2}$$

Fragestellung:
Berechnen Sie die mittlere Masse m'_{mittel} für $m'_1 = 300\ \mathrm{kg/m^2}$ (ein flankierendes Bauteil)

Lösung:

$$m'_{mittel} = \left[\frac{1}{1} \cdot (300)^{-2,5}\right]^{-0,4} = 300\,\frac{kg}{m^2}$$

3.6 Rechnen mit Logarithmen

3.6.1 Logarithmengesetze

Für die Rechnung mit Logarithmen müssen **Logarithmengesetze** beachtet und angewandt werden. Diese Gesetzmäßigkeiten erleichtern den allgemeinen Umgang mit dem Logarithmus. Auch für die Bearbeitung von Exponentialgleichungen und logarithmischen Gleichungen werden die Logarithmengesetze, wie auch die Potenzgesetze als Bearbeitungshilfe angewandt.

grundlegend geltende Regel

Als allgemein gültige Regeln werden festgelegt:

$$log_a(a) = 1$$

$$log_a(1) = 0$$

$$log_a(0) \quad \text{ist nicht erklärt!}$$

$$log_a(a^x) = x$$

$$a^{(log_a x)} = x$$

Multiplikation

Ein Produkt wird logarithmiert, indem die Logarithmen der einzelnen Faktoren addiert werden.

$$log_a(x \cdot y) = log_a(x) + log_a(y)$$

Division

Ein Bruch wird logarithmiert, indem die Logarithmen von Zähler und Nenner subtrahiert werden.

$$log_a\left(\frac{x}{y}\right) = log_a(x) - log_a(y)$$

Potenz

Wird eine Potenz logarithmiert, so kann der Exponent als Faktor vor den Logarithmus gezogen werden.

$$log_a(x^r) = r \cdot log_a(x)$$

weitere praktische Umformungen

die Potenzregel, dass eine Potenz mit negativem Exponenten auch als Kehrwert der Potenz mit dem entsprechend positiven Exponenten geschrieben werden kann, kann auch für die Umformung bei der Logarithmenrechnung angewandt werden.

$$log_a(x^{-1}) = log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -log_a(x)$$

Eine weitere sinnvolle Umformung bietet die Schreibweise als Wurzel

$$log_a(\sqrt[n]{x}) = log_a\left(x^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n} log_a(x)$$

Alle Logarithmen dürfen zu einer beliebigen Basis c umgerechnet werden

$$log_a x = \frac{log_c x}{log_c a}$$

3.6.2 Logarithmensysteme

In naturwissenschaftlichen Untersuchungen und auch in den Ingenieurwissenschaften spielt die Logarithmusfunktion eine wichtige Rolle. Dabei bilden alle Logarithmen mit einer gleichbleibenden Basis a ein Logarithmensystem zur Basis a. Dabei kann die Basis a beliebig gewählt werden.
In der Praxis werden jedoch drei Basen für Logarithmensysteme favorisiert, wobei diesen Systemen eigene Benennungen und vereinfachte Symbole zugeordnet werden.

a) dekadische Logarithmen

Die dekadischen Logarithmen werden im Vergleich zu anderen Logarithmensystemen am häufigsten für einfache logarithmische Berechnungen, im Wesentlichen das praktische Zahlenrechnen, verwendet.
Die **Basis dieses Systems ist die Zahl 10**, weshalb auch die Benennung Zehner-Logarithmus gebräuchlich ist. In Deutschland wird der dekadische Logarithmus $log_{10}(b)$ mit der Schreibweise $\lg(b)$ abgekürzt. International ist aber das Kürzel $\log(x)$ gebräuchlich und wird daher meist auch auf Taschenrechnern benutzt.

$$\boldsymbol{log_{10}x = lg(x) = log(x)}$$

Gelesen wird $lg(x)$ einfach als „l-g-x“

b) natürliche Logarithmen

Die natürlichen Logarithmen spielen als mathematische Funktion und bei theoretischen Untersuchungen naturwissenschaftlicher Probleme eine große Rolle.
Die **Basis dieses Systems ist die EULER´sche Zahl (e = 2,718281828….)**. Diese ist ein Hilfsmittel zur Beschreibung von Wachstumsprozessen. Auch für die natürlichen Logarithmen $log_e(x)$ gibt es ein eigenes, kürzeres Symbol $ln(x)$.

$$\boldsymbol{log_e x = ln(x)}$$

Gelesen wird $ln(x)$ als „Logarithmus naturalis von x“ oder „natürlicher Logarithmus von x“ oder einfach als „l-n-x“

c) binäre Logarithmen

Die binären Logarithmen werden auch als duale Logarithmen bezeichnet. Dieses Logarithmensystem wird bei Berechnungen im Bereich der Informatik angewendet.
Die **Basis dieses Systems ist die Zahl 2.** Auch für die binären Logarithmen $log_2(x)$ gibt es ein eigenes, kürzeres Symbol $lb(x)$.

$$\boldsymbol{log_2 x = lb(x)}$$

Gelesen wird $lb(x)$ einfach als „l-b-x“

3.6.3 Beispiel-Aufgabe:

Die Logarithmenrechnung wird ebenfalls im Fach der Bauphysik wieder aufgegriffen, da einige Formeln des Schalldrucks mit Hilfe des Logarithmus berechnet werden.

Die Summe mehrerer gleichzeitig wirkender Schallpegel L_i wird mit folgender Formel bestimmt:

$$L_{ges} = 10 \cdot \log\left(\sum_{i=1}^{n}\left(10^{\left(\frac{L_i}{10}\right)}\right)\right) \text{ in dB}$$

Fragestellung:
Ermitteln Sie überschlägig die Summe der Schallpegel: L_1= 50 dB und L_2= 30 dB

Lösung:

$$L_{ges} = 10 \cdot \log\left(10^{\left(\frac{50}{10}\right)} + 10^{\left(\frac{30}{10}\right)}\right) = 10 \cdot \log(101000) \approx 10 \cdot \log(100000) = 10 \cdot 5 = 50 \text{ dB}$$

3.7 Aufgaben

A3.1. Berechnen Sie (ohne Taschenrechner):

a) 10^3

b) $2^{(3+2)}$

c) $\frac{5^3}{5^2}$

A3.2. Vereinfachen Sie:

a) $a^y \cdot a^{(3y)}$

b) $\frac{10^x}{10^{5a}}$

c) $\frac{a^x}{\sqrt[5]{a}}$

d) $(10^{-a})^{-b}$

e) $\sqrt[2]{\left(\frac{x^2 \cdot y^3}{z^4}\right)}$

A3.3. Berechnen Sie (ohne Taschenrechner):

a) $\log_{27} 3$

b) $\lg 0{,}1$

c) $\lg 5 + \lg 20$

d) $\lg 1000 - \lg 10$

e) $\lg 4000 - \lg 40$

f) $\log_{27}(27^6)$

A3.4. Fassen Sie als einen Logarithmus zusammen:

a) $\frac{1}{3}(\log_5(a) + 2\log_5(b))$

b) $\log_a(x) + \log_a(y) - (\log_a(r) + \log_a(s))$

c) $5(2\log_a(x) - 3\log_a(y))$

A3.5. Die Summe mehrerer gleichzeitig wirkender Schallpegel L_i wird mit folgender Formel berechnet:

$$L_{ges} = 10 \cdot \log\left(\sum_{i=1}^{n}\left(10^{\left(\frac{L_i}{10}\right)}\right)\right) \text{ in dB}$$

a) Berechnen Sie den Gesamtschallpegel L_{ges} von zwei Schallquellen L_1 =0 dB und L_2 =0 dB.

b) Ermitteln Sie überschlägig durch umformen den Gesamtschallpegel L_{ges} von zwei Schallquellen L_1 =80 dB und L_2 =30 dB.

A3.6. Der mittlere Schallpegel L_{mittel} wird mit folgender Gleichung berechnet:

$$L_{mittel} = 10 \cdot \log\left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n}\left(10^{\left(\frac{L_i}{10}\right)}\right)\right) \text{ in dB}$$

Berechnen Sie den mittleren Schallpegel von zwei Schallmessungen mit den Ergebnissen: L_1 =60 dB und L_2 =70 dB.

A3.7. Bei der Berechnung der Schalldämmung wird die mittlere Masse m'_{mittel} der Bauteile mit folgender Formel berechnet:

$$m'_{mittel} = \left[\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} (m'_i)^{-2,5}\right]^{-0,4}$$

Berechnen Sie die mittlere Masse m'_{mittel} für $m'_1 = 500$ kg/m² und $m'_2 = 100$ kg/m² (zwei flankierende Bauteile)

4 Terme und Termumformungen

Dipl.-Ing. Dieter Herbeck

4.1 Grundlagen

Unter einem Term ist ein Rechenausdruck zu verstehen, der mithilfe eindeutig definierter Rechenzeichen einen Rechenvorgang beschreibt.

Terme können bestehen aus:	Zahlen	$-2;\ \sqrt{4};\pi$
	Variablen und deren Potenzen	$x;y;b^3;n^k$
	Operatoren	$+\ ;\ -\ ;\ \cdot\ ;\ \div\ ;\ \int\quad ,\frac{\partial}{\partial x}$
	Klammern	$(\quad), [\quad]$

Verändert man die Gestalt eines Terms, bei dem sich dessen Wert aber nicht ändert, so spricht man von einer Termumformung.

4.2 Addition und Subtraktion von Termen

In einem ersten Schritt werden die Bestandteile eines Terms sinnvoll geordnet und zusammengefasst. Als Regeln für die Termumformung werden das Kommutativgesetz der Addition, das Assoziativgesetz der Addition (s. Kapitel 1.3) und die „Punkt- vor Strichrechnung“ zugrunde gelegt.

a) einfache Terme: 1. ordnen → alphabetisch
2. zusammenfassen → nur gleiche Terme

Beispiel: $5a + 3b - 2a - 9b \quad = 3a - 6b$

b) Terme mit Potenzen: 1. ordnen → alphabetisch, Potenz absteigend
2. zusammenfassen → nur gleiche Terme

Beispiel: $3x^2y + 2xyx + 4z^2x - 4xz^2 + 5yxz \quad = 5x^2y + 5xyz$

c) Klammerterme: 1. Klammern auflösen → Reihenfolge u. Vorzeichen beachten!
2. ordnen
3. zusammenfassen

Beispiel: $(2x + 5y) - [(3x + 2) - (y + 5x^2)] \quad = 5x^2 - x + 6y - 2$

4.3 Ausmultiplizieren von Klammertermen (Expandieren)

4.3.1 Zwei und mehrere Klammerterme

Bei der Multiplikation von zwei oder mehreren Klammern, die jeweils eine Summe oder Differenz enthalten, muss jeder Ausdruck der ersten Summe oder Differenz mit jedem Ausdruck der weiteren Summe(n) oder Differenz(en) multipliziert werden. Ergänzend zu Kapitel 4.2 gilt das Distributivgesetz (s. Kapitel 1.3).

a) Zwei Klammerterme: 1. ausmultiplizieren
2. ordnen
2. zusammenfassen

Beispiel: $(x-3)(x+1) \quad = x^2 - 2x - 3$

b) Mehrere Klammerterme:
1. in Terme nach 4.2 c) mittels eckiger Klammern aufteilen
2. von innen nach außen ausmultiplizieren
3. ordnen
4. zusammenfassen

Beispiel: $(-3)(a-4)(2+b)(a-2) = -3a^2b - 6a^2 + 18ab + 36a - 24b - 48$

4.3.2 Binomische Formeln

Durch die Anwendung der Binomischen Formeln wird das Ausmultiplizieren von Termen der im Folgenden genannten Binome (Term mit zwei Gliedern) erheblich vereinfacht.

a) Binomische Formeln

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Beispiel: $(2s+3t)\cdot(2s-3t) = 4s^2 - 9t^2$

b) Binomische Formeln höherer Ordnung: Das Pascal'sche Dreieck

1. Binomische Formel

1	$(a+b)^0$	$= 1$
1 1	$(a+b)^1$	$= a + b$
1 2 1	$(a+b)^2$	$= a^2 + 2ab + b^2$
1 3 3 1	$(a+b)^3$	$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
1 4 6 4 1	$(a+b)^4$	$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
… …	$(a+b)^n$	$= a^nb^0 + \quad \dots \quad + a^0b^n$

2. Binomische Formel

1	$(a-b)^0$	$= 1$	
1 1	$(a-b)^1$	$= a - b$	
1 2 1	$(a-b)^2$	$= a^2 - 2ab + b^2$	
1 3 3 1	$(a-b)^3$	$= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$	
1 4 6 4 1	$(a-b)^4$	$= a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$	
… …	$(a-b)^{2n}$	$= a^{2n} - \cdots + b^{2n}$	=> 2n gerade
	$(a-b)^{2n+1}$	$= a^{2n+1} - \cdots - b^{2n+1}$	=> 2n+1 ungerade

c) Erweiterte binomische Formeln

$(a+b+c+\cdots)^2 = a^2 + 2ab + 2ac + \cdots + b^2 + 2bc + \cdots + c^2 + \cdots$

4.4 Faktorisieren

4.4.1 Ausklammern

Kommen bei Summen von Produkttermen gleiche Faktoren vor, so können diese ausgeklammert werden.

Beispiel: $4a^2\cdot(b-c)^n - 3d^2\cdot(b-c)^n = (b-c)^n\cdot\left(2a-\sqrt{3}d\right)\cdot\left(2a+\sqrt{3}d\right)$

4.4.2 Die binomische Formel

a) Binomische Formel „rückwärts“

1. u. 2. $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$

3. $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

Beispiel: $9x^{2n} + 4x^{2m} - 12x^{n+m} = (2x^m - 3x^n)^2$

b) Quadratische Ergänzung

Bei diesem Verfahren wird ein Term, in dem eine Variable quadratisch vorkommt, so umgeformt, dass eine der binomischen Formeln angewendet werden kann.

→ aus $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

Beispiel: $3x^2 - 18x + 24 = 3(x-4)(x-2)$

4.4.3 Mehrgliedrige Terme: Polynome

Polynome $P_n(x)$ sind in den hier thematisierten Anwendungsfällen durch folgende Merkmale gekennzeichnet:

Form: $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_0$

→	nur eine Variable (i.d.R. x) vorhanden
n	Grad des Polynoms
$a_n, a_{n-1} \ldots$	Koeffizienten bzw. Vorfaktoren ($a_n, a_{n-1} \ldots$)
a_0	Konstante

Ziel ist es, über das Faktorisieren des Polynoms

$$P_n(x) = P_{n-1}(x) \cdot (x - x_1)$$

alle Nullstellen x_i des Polynoms durch Zerlegung zu finden, von denen es maximal „n“ Nullstellen gibt.

Beispiel: $n = 3 \rightarrow \; x^3 - 7x^2 + 7x + 15 = (x+1)(x-3)(x-5)$

Methode: Linearfaktorzerlegung mit Polynomdivision → Kapitel 4.5.3

4.5 Bruchterme

Unter einem Bruchterm versteht man einen Term,

$$T_1 \div T_2 = \frac{T_1}{T_2} \qquad T_2 \neq 0$$

der aus einem Zähler und einem Nenner besteht, welche eine oder mehrere Variable enthalten.

4.5.1 Multiplikation und Division von Bruchtermen

a) Bruchterme der Form: $\frac{Produktterm}{Produktterm}$

Vorgehensweise:
1. Man dividiert durch einen Bruch, indem man mit dem Kehrwert multipliziert
2. Klammern auflösen
3. Potenzgesetze beachten (siehe Kapitel 3.5.1)
4. kürzen
5. ordnen nach: a) Vorzeichen beachten, b) Zahlen, c) Variable (alphabetisch / absteigende Potenzen)

Beispiel: $\frac{15xy}{24z^2} \div \left(-\frac{5x}{6z^3}\right) \quad = -\frac{3}{4}yz$

b) Bruchterme der Form: $\frac{Summenterm}{Produktterm}$

Vorgehensweise:
1. Teilbrüche bilden
2. kürzen
3. ordnen nach: a) Vorzeichen beachten, b) Zahlen, c) Variable (alphabetisch / absteigende Potenzen)

Beispiel: $\frac{10yx^4-5xy^2+yz-5}{5xy} \quad = 2x^3 - y + \frac{z}{5x} - \frac{1}{xy}$

c) Bruchterme der Form: $\frac{Summenterm}{Summenterm}$

Vorgehensweise:
1. Ausklammern (siehe auch Kapitel 4.4 Faktorisieren)
2. Binomische Formeln
3. Quadratische Ergänzung
4. ordnen nach: a) Vorzeichen beachten, b) Zahlen, c) Variable (alphabetisch / absteigende Potenzen)

Beispiel: $\frac{2z^2yx+6xz}{4xz-8z^2y^2x^2} \quad = \frac{yz+3}{2-4xy^2z}$

d) Kombination der Bruchterme aus a) bis c)

Beispiel: $\frac{5ab}{a+c} \div \frac{15ac}{a^2-c^2} \quad = \frac{1}{3}(\frac{ab}{c} - b)$

4.5.2 Addition und Subtraktion von Bruchtermen

Vorgehensweise:
1. Hauptnenner bilden durch erweitern
2. ggfs. Faktorisieren des Nenners

Beispiel: $\frac{y}{x-2} - \frac{xy+2}{x^2-4} \quad = \frac{2(y-1)}{x^2-4}$

4.5.3 Polynombrüche

Polynombrüche haben die Form

$$\frac{\textbf{Zählerpolynom}}{\textbf{Nennerpolynom}} = \frac{\boldsymbol{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0}}{\boldsymbol{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0}} = \frac{\boldsymbol{Z(x)}}{\boldsymbol{N(x)}}$$

mit dem Zählergrad m und dem Nennergrad n.

a) Unechte Polynombrüche ($m \geq n$)

Die Polynomdivision wird analog zur normalen schriftlichen Division durchgeführt

Beispiel: $\frac{x^3-7x^2+7x+15}{x^2-4x-5} = \frac{(x+1)\cdot(x-5)\cdot(x-3)}{(x+1)\cdot(x-5)} = x-3$

Ansatz: $(x^3 - 7x^2 + 7x + 15) \div (x+1) \quad = x^2 - 8x + 15$

$\rightarrow \; x^3 - 7x^2 + 7x + 15 \quad = (x+1)\cdot(x^2 - 8x + 15)$

$= (x+1)\cdot(x-5)\cdot(x-3)$

b) Echte Polynombrüche ($m < n$)

Im günstigsten Fall ist das Nennerpolynom der Form $a \cdot x^n$, wodurch der Polynombruch einfach in Teilbrüche zerlegt werden kann.

Beispiel: $\frac{3x^3-4x^2+5x-6}{6x^4} = \frac{1}{2x} - \frac{2}{3x^2} + \frac{5}{6x^3} - \frac{1}{x^4}$

Ein weiteres Verfahren, die sog. Partialbruchzerlegung, wird im Rahmen dieses Mathematik-Vorkurses nicht behandelt.

4.6 Aufgaben

A4.1. Vereinfachen Sie die folgenden Terme

a) $(5a + 3b) - [(12a - 6b) - (10a - 2b)] - 3a$

b) $6xy^2x^2 - 15y^4x + 20x^3x^3 - 8x^3y^2 + 12y^2xy^2$

A4.2. Ausmultiplizieren von Klammertermen

a) Klammern Sie aus und vereinfachen Sie

i) $(x-4)\cdot(x+2)$

ii) $(x+1)\cdot(x-4)\cdot(x-2)$

iii) $(-2)\cdot(3a+5)\cdot(a-4)\cdot(a^2+1)$

b) Wenden Sie die binomischen Formeln an

i) $\left(\frac{1}{2}x - 5\right)^2$ 2. Binomische Formel

ii) $(2x + 4y)(2x - 4y)$ 3. Binomische Formel

iii) $(-2pc - r)\cdot(2pc + r)$ 1. Binomische Formel

iv) $(8m + 3n)\cdot(-3\mathrm{n} + 8m)$ 3. Binomische Formel

v) $(2r + s - t)^2$ Erweiterte Binomische Formel

vi) $(a + 2b)^3$ 1. Binomische Formel höherer Ordnung

A4.3. Faktorisieren

a) Klammern Sie aus und vereinfach Sie

i) $4x^3y + 2x^2y - 8y$

ii) $3a^2 \cdot (x-z)^n - 2b^2 \cdot (x-z)^n$

b) Faktorisieren Sie mit Hilfe der binomischen Formeln

i) $4a^2 - 12ab + 9b^2$ 2. Binomische Formel

ii) $2x^2 - 4x - 16$ Quadratische Ergänzung

c) Zerlegen Sie das Polynom in Linearfaktoren

i) $n = 3 \rightarrow x^3 - 5x^2 + 2x + 8$

A4.4. Bruchterme

a) Bruchterme der Form: $\frac{\text{Produktterm}}{\text{Produktterm}}$
Vereinfachen Sie

i) $\frac{12\text{ab}}{25\text{z}} \div \left(-\frac{2\text{b}}{5\text{z}^2}\right)$

ii) $\frac{4a^2x^3}{3by} \cdot \frac{2y^2x}{ab^2} \div \frac{a^2x^3}{5b^6}$

b) Bruchterme der Form: $\frac{\text{Summenterm}}{\text{Produktterm}}$
Vereinfachen Sie

i) $\frac{3x^3-6xz+y}{3x}$

c) Weitere Formen:
Vereinfachen Sie

i) $\frac{x-2}{16-x^2} \div \frac{x-2}{x^2+8x+16}$

ii) $\frac{12xy}{a^2-b^2} \div \frac{8xc}{a+b}$

d) Addition und Subtraktion von Bruchtermen
Fassen Sie zusammen

i) $\frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+2}$

ii) $\frac{xy+1}{y^2-1} - \frac{x}{y-1}$

e) Polynombrüche
Vereinfachen Sie

i) $\frac{x^2-18x+81}{x^2-81}$

ii) $\frac{x^3-3x^2-6x+8}{x-1}$

iii) $\frac{x^3-5x^2+2x+8}{x^2-6x+8}$

iv) $\frac{3x^2-5x+8}{4x^4}$

5 Gleichungen und Ungleichungen

Tobias Höller, M.Eng.

5.1 Lineare Gleichungen

In linearen Gleichungen taucht die Unbekannte x nur in der ersten Potenz auf. Jede lineare Gleichung lässt sich durch äquivalente Umformungen in die äquivalente Gleichung

$$ax + b = 0 \quad \text{mit} \quad a \neq 0$$

überführen.

Diese lässt sich durch grundlegende äquivalente Umformungen weiter vereinfachen oder auflösen zu:

$$x = -\frac{b}{a}$$

Geometrisch betrachtet sind lineare Gleichungen immer Geradengleichungen. Jede Gerade in einem zweidimensionalen Koordinatensystem schneidet die x-Achse in einem Punkt. Da sich jede lineare Gleichung in der Form

$$ax + b = 0 \quad \text{mit} \quad a \neq 0$$

darstellen lässt, hat also jede lineare Gleichung genau eine Lösung.

5.2 Quadratische Gleichungen

In quadratischen Gleichungen taucht die Unbekannte x höchstens in der zweiten Potenz auf. Jede quadratische Gleichung lässt sich durch äquivalente Umformungen in die **allgemeine Form**

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{mit} \quad a \neq 0$$

überführen.

Sie lässt sich durch Division durch $a \neq 0$ in die **Normalform** überführen

$$\Leftrightarrow x^2 + px + q = 0$$

Geometrisch betrachtet handelt es sich bei quadratischen Gleichungen um Parabeln.

Parabeln können:

- nach oben oder nach unten geöffnet sein. Erkennbar ist das am Vorzeichen vor dem x^2.
- nach links, rechts, oben oder unten verschoben sein. Das hat einen Einfluss auf die Anzahl der Lösungen von $ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{mit} \quad a \neq 0$
- Parabeln können **keine**, **genau eine** oder **zwei Nullstellen** besitzen.

Quadratische Gleichungen können also:

- **keine**, **genau eine** oder **zwei Lösungen** besitzen.

5.2.1 Lösungsverfahren

a) quadratische Ergänzung

Das allgemeinste Verfahren zur Lösung von quadratischen Gleichungen ist das Verfahren der quadratischen Ergänzung. Für dieses Verfahren müssen keine Formeln auswendig gelernt werden. Ziel ist es eine binomische Formel herzustellen, sodass wir auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens die Wurzel ziehen können.

b) p-q-Formel

Eine Abwandlung des o.g. Verfahrens ist die berühmte p-q-Formel, die fast jeder aus der Schule kennt. Löst man die quadratische Gleichung in der Normalform (also mit Buchstaben statt Zahlen) mit dem Verfahren der quadratischen Ergänzung erhält man eine kompakte Formel für die Lösungen der Gleichung:

Für $x^2 + px + q = 0$ gilt: $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

Wichtig ist, dass die quadratische Gleichung in der Normalform vorliegt.

c) abc-Formel

Liegt die Gleichung in der allgemeinen Form vor empfiehlt es sich die Normalform herzustellen und die Gleichung anschließend mit der p-q-Formel zu lösen. Es existiert aber auch eine Lösungsformel für allgemeine quadratische Gleichungen:

Für $ax^2 + bx + c = 0$ gilt: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Die Anwendung dieser so genannten abc-Formel ist nicht verboten, auch sie liefert richtige Ergebnisse. Allerdings ist die Benutzung ohne den Taschenrechner meist sehr schwierig, da aus großen Zahlen die Wurzel gezogen werden muss.

d) Satz von Viëta

Ein weiteres Verfahren ist der Satz von Viëta. Auch dieses Verfahren ist zulässig, allerdings handelt es sich bei diesem Verfahren eher um eines zur Überprüfung möglicher Lösungen.

Der Satz basiert auf der Besonderheit, dass für eine quadratische Gleichung in der Normalform folgendes gilt:

Für $x^2 + px + q = 0$ gilt: $p = -(x_1 + x_2)$ und $q = x_1 \cdot x_2$

5.3 Kubische Gleichungen

In kubischen Gleichungen taucht die Unbekannte x höchstens in der dritten Potenz auf. Jede kubische Gleichung lässt sich durch äquivalente Umformungen in die **allgemeine Form**

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad \text{mit} \quad a \neq 0$$

überführen.

Geometrisch betrachtet handelt es sich bei kubischen Gleichungen um Funktionen dritten Grades. Aus dem Funktionsverlauf ergibt sich, dass sie **eine, zwei oder drei Lösungen** besitzen! Jedes Polynom dritten Grades lässt sich aus einzelnen **Linearfaktoren**

$$a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) = 0$$

zusammensetzen. An diesen kann man die Lösungen ablesen.

5.3.1 Lösungsverfahren

a) Polynomdivision

Wenn es uns gelingt eine Lösung x_1 durch ausprobieren zu ermitteln, lässt sich der zugehörige Linearfaktor mit dem Verfahren der Polynomdivision abspalten (ausklammern).

$$ax^3 + bx^2 + cx + d \Leftrightarrow (x - x_1) \cdot (ax^2 + \ldots)$$

Das Ergebnis der Polynomdivision ist ein Polynom zweiten Grades, es lässt sich mit den oben genannten Verfahren weiter lösen.

b) Horner Schema und andere Verfahren

Ein weiteres recht weit verbreitetes Verfahren zu Lösung von kubischen Gleichungen ist das Horner Schema. Das Verfahren wird aber im Studiengang Bauingenieurwesen nicht gelehrt, daher wird auch in diesem Skript nicht weiter darauf eingegangen. Nichtsdestotrotz ist es ein zulässiges Verfahren zur Lösung kubischer Gleichungen.

5.4 Gleichungen höheren Grades

Für alle Gleichungen höheren Grades gilt, dass sie sich mithilfe der oben genannten Verfahren lösen lassen. Der Grad des Ergebnispolynoms der Polynomdivision ist immer um eins niedriger als vor der Polynomdivision. So lassen sich durch wiederholte Polynomdivision lösbare Gleichungen erzeugen.

5.5 Bruchgleichungen

Bruchgleichungen werden solche Gleichungen genannt, die aus Quotienten bestehen, in deren Nenner Variablen auftauchen.

Bruchgleichungen lassen sich also aufteilen in

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

wobei $P(x)$ und $Q(x)$ Polynome vom Grade n sind.

Durch geschicktes Erweitern der Brüche ist es möglich die Nenner zu eliminieren. Sinnvolle Wege sind aus dem Kapitel „Terme- und Termumformungen“ bekannt.

Wichtig bei der Lösung von Bruchgleichungen ist, dass durch notwendiges Erweitern sogenannte Scheinlösungen hinzukommen können. Ob die ermittelten Lösungen tatsächlich Lösungen der Aufgabe sind lässt sich durch eine einfache Probe kontrollieren. Es ist also zwingend erforderlich die Lösungen abschließend in die Ausgangsgleichung einzusetzen um zu überprüfen ob die gefundenen Lösungen auch die tatsächlichen sind. Es ist nicht möglich, dass Lösungen verloren gehen.

5.6 Wurzelgleichungen

Wird es noch ein wenig komplizierter, so versteckt sich die Variable unter einem Wurzelzeichen. Auch hier sind aus dem Kapitel „Terme- und Termumformungen“ sinnvolle Verfahren bekannt.

Ziel der Umformungen ist es die Wurzel so zu isolieren, dass sie beim Quadrieren der ganzen Gleichung wegfällt. Leider werden dabei gerne die **Binomischen Formeln** ignoriert! Das ist ein grober Fehler!

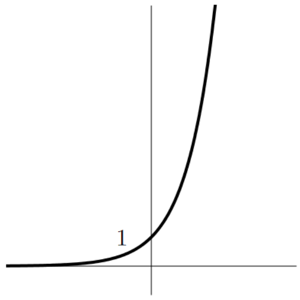
Auch bei Wurzelgleichungen gilt, dass durch das Potenzieren Scheinlösungen hinzukommen können. Auch hier müssen die gefundenen Lösungen in die Ausgangsgleichung eingesetzt werden um zu überprüfen ob es sich tatsächlich um Lösungen handelt. Auch beim Potenzieren können keine Lösungen verloren gehen.

5.7 Transzendente Gleichungen

Alle zuvor beschriebenen Gleichungen werden algebraische Gleichungen genannt, bzw. lassen sie sich auf algebraische Gleichungen zurückführen. Alle anderen Gleichungen werden transzendente Gleichungen genannt.

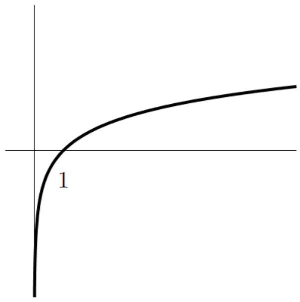
Die wichtigsten transzendenten Gleichungstypen mit denen Sie im Bauingenieurwesen zu tun haben sind die **Exponentialgleichungen**, **logarithmischen Gleichungen** und **trigonometrischen Gleichungen**.

5.7.1 Exponentialgleichungen



Sobald die Variable einer Gleichung im Exponenten irgendeines Ausdrucks auftaucht sprechen wir von Exponentialgleichungen. Zur Lösung solcher Gleichungen finden Sie im Kapitel „Potenzen und Logarithmen“ mit den **Potenz- und Logarithmengesetzen** wichtige Hilfsmittel. Mit diesen Hilfsmitteln lassen sich, wie bei den Wurzelgleichungen, entsprechende Terme isolieren, sodass sich die Variable aus dem Exponenten herauslösen lässt.

5.7.2 Logarithmische Gleichungen



Gleiches gilt auch für die logarithmischen Gleichungen. Auch hier finden Sie Kapitel „Potenzen und Logarithmen“ mit den **Potenz- und Logarithmengesetzen** wichtige Hilfsmittel um Terme so zu isolieren, dass sich die Variable aus dem Logarithmus herauslösen lässt.

5.7.3 Trigonometrische Gleichungen

In trigonometrischen Gleichungen taucht die Variable im Argument einer trigonometrischen Funktion aus. Weitere Informationen über die Winkelfunktionen finden Sie im Kapitel „Trigonometrie“.

5.8 Lineare Ungleichungen

Eine Ungleichung entsteht, wenn zwei Terme T_1 und T_2 nicht durch ein Gleichheitszeichen „=“, sondern durch ein Relationszeichen $<, >, \leq$ oder $\geq$ verbunden sind. Das bedeutet, dass es in der Regel nicht eine einzelne Lösung, sondern eine Lösungsmenge aus vielen (nebeneinanderliegenden) Zahlen gibt. Diese können und müssen in Intervallen zusammengefasst werden.

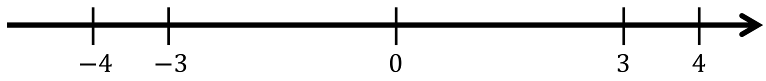
Die Rechenregeln für Ungleichungen sind grundsätzlich die gleichen wie sie auch für Gleichungen gelten. Sie werden nur um eine einzige Regel ergänzt.

Bei der **Multiplikation mit / Division durch negative Werte** dreht sich das Relationszeichen um.

$$a < b \qquad \Leftrightarrow \qquad -a > -b$$

Das lässt sich auf einem Zahlenstrahl ganz einfach verdeutlichen:

$$3 < 4 \qquad \Leftrightarrow \qquad -3 > -4$$



Problematisch wird es, wenn wir nicht genau wissen ob ein Term mit dem wir multiplizieren oder dividieren positiv oder negativ ist. Oder, wenn ein Term für verschiedene x-Werte sowohl positiv als auch negativ sein kann. In diesen Fällen müssen wir verschiedene Fälle unterscheiden!

5.8.1 Fallunterscheidung

Wir wissen, dass wir bei der Multiplikation bzw. Division auf das Vorzeichen des Terms aufpassen müssen. Immer wenn ein Term für verschiedene x-Werte sowohl positiv als auch negativ sein kann müssen wir eingrenzen, für welche Intervalle der Term positiv bzw. negativ ist. Die einzelnen Bereiche müssen anschließend einzeln betrachtet werden. Und ganz am Ende der Aufgabe muss der komplette Definitionsbereich der Aufgabe untersucht worden sein.

Betrachten wir dazu folgendes Beispiel:

Sie möchten während der Termumformungen den Term $(x-2)$ multiplizieren oder dividieren. Für verschiedene x-Werte nimmt der Term verschiedene Vorzeichen an.

1. Für den Wert $x = 2$ ist der Term $(x-2) = 0$
   Das bedeutet, dass eine geplante Division gar nicht durchgeführt werden darf.
2. Für alle Werte $x > 2$ ist der Term $(x-2)$ auf jeden Fall positiv
   Das bedeutet, dass eine Multiplikation bzw. Division mit diesem Term dann keine besonderen Auswirkungen hat.
3. Für alle Werte $x < 2$ ist der Term $(x-2)$ auf jeden Fall negativ
   Das bedeutet, dass sich das Relationszeichen der Aufgabe bei einer Multiplikation oder Division mit diesem Term ändert.

Obige Auflistung fasst man häufig zu einem kompakten Ausdruck zusammen:

$$(x-2)\begin{cases} > 0, \text{für } x > 2 \\ = 0, \text{für } x = 2 \\ < 0, \text{für } x < 2 \end{cases}$$

Bei diesem Beispiel müssen wir also drei Fälle betrachten und untersuchen, wie sich die Ungleichung in den verschiedenen Intervallen lösen lässt.

Manchmal lassen sich verschiedene Fälle zusammenfassen, das kann Rechenarbeit sparen. Wichtig ist (s.o.), dass man mit der Fallunterscheidung den kompletten Zahlenstrahl des Definitionsbereiches abdeckt!

5.9 Gleichungen und Ungleichungen mit Beträgen

In der Literatur findet man verschiedene Definitionen für die Betragsfunktion. Sie ähneln sich alle und lauten in etwa: „Unter dem Betrag einer Zahl versteht man den Wert der Zahl ohne Rücksicht auf das Vorzeichen. Der Betrag ist damit stets eine positive Zahl. Sie gibt den Abstand einer Zahl zum Ursprung an.“

Diese Definition lässt sich ohne weiteres auch auf Terme mit Variablen übertragen. In der Literatur findet man als Erklärung dann meist einen kleinen, kompakten Ausdruck. Häufig erkennt man aber gar nicht die Tragweite dieses kleinen Ausdrucks…

$$|a|\begin{cases} a, \text{für } a \geq 0 \\ -(a), \text{für } a < 0 \end{cases}$$

Mit einem Zahlenbeispiel sollte es klarer werden:

$$|3x-9|\begin{cases} 3x-9 & \text{für } a \geq 3 \\ -(3x-9) & \text{für } a < 3 \end{cases}$$

Die Betragstriche sorgen also dafür, dass automatisch eine Fallunterscheidung vorgenommen wird.
Beim Auflösen einer Ungleichung müssen wir dies berücksichtigen und dann die beiden (oder auch mehreren) Fälle getrennt voneinander betrachten.

Wichtig ist auch hier, dass wir sicherstellen, am Ende der Aufgabe den kompletten Zahlenstrahl des Definitionsbereiches untersucht zu haben!

5.10 Aufgaben

A5.1. Lösen Sie die Gleichungen für x

a) $14 + 2x = 11 - 7x$

b) $\frac{2}{3}x + 5 = \frac{3}{4}x - 6$

A5.2. Stellen Sie die folgenden Formeln um

a) $l_t = l_0 \cdot (1 + \alpha t)$ nach α

b) $\frac{r+f}{r_1+a+f} = \frac{r}{r_1}$ nach f

A5.3. Lösen Sie die folgenden Textaufgaben

a) Ein Wasserbehälter kann durch drei Röhren gefüllt werden. Wird nur die erste Röhre benutzt, so dauert die Füllung 3 Stunden. Die zweite Röhre allein benötigt 4 Stunden, die dritte allein 6 Stunden.
In welcher Zeit wird der Behälter gefüllt, wenn alle drei Röhren gleichzeitig laufen?

b) Um 7 Uhr fährt von A aus ein LKW mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit $v_L = 40\ km/h$ nach dem $e = 225\ km$ entfernten Ort B ab. Ihm fährt von B aus um 8:30 Uhr ein PKW mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit $v_P = 70\ km/h$ entgegen.
Wann und wo begegnen sich die beiden Fahrzeuge?

A5.4. Lösen Sie die folgenden Gleichungen

a) $5x^2 - 45x + 70 = 0$

b) $8x^2 + 32x - 360 = 0$

c) $2x^2 + 264 = 4x$

d) $3x^2 - 21x = 54$

A5.5. Lösen Sie die folgenden Gleichungen

a) $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$

b) $x^3 - 4x^2 - x + 4 = 0$

c) $4x^4 - 12x^3 + 7x^2 + 3x - 2 = 0$

A5.6. Lösen Sie die folgenden Gleichungen

a) $\frac{8}{9} = \frac{5x}{3}$

b) $\frac{11-6x}{8} = \frac{7}{5}$

c) $\frac{x+1}{15} + \frac{2x-10}{5} = 3 - \frac{3x-16}{3}$

A5.7. Lösen Sie die folgenden Gleichungen

a) $\sqrt{x+5} = \sqrt{2x+3} + 1$

b) $\sqrt[3]{x+2} = 3$

A5.8. Bestimmen Sie die Lösungsmengen

a) $2x + 3 < 9$

b) $\frac{1}{3} - \frac{4}{5}x < \frac{5}{6}$

c) $9x - 8 - 3(x-2) > 2(x+3)$

d) $(3x+1)(2x-1) < (5x-3)(2x-1)$

e) $(7x-3)(5-7x) > (3-7x)(5x+3)$

f) $\frac{3}{2x-4} \leq 2$

g) $\frac{2x-2}{2x+2} < 2$

h) $\frac{x+1}{x-3} < \frac{x-1}{x+2}$

A5.9. Bestimmen Sie die Lösungsmengen

a) $|2x-1| \geq |x-1|$

b) $\frac{|3x-2|}{x+2} \geq 2$

c) $\frac{2x+3}{|x+4|} \leq 1$

d) $\left|\frac{3}{2}x + \frac{3}{4}\right| \geq |x-2|$

6 Funktionen

Prof. Dr.-Ing. Johannes Lange

Als erstes ein *Beispiel*:

Lineare Funktion: Ihr Fertiger für Asphalt hat eine Einbaugeschwindigkeit von 4 m pro Minute. Daraus können Sie ermitteln, dass Sie z.B. für 20 m Straße 5 Minuten benötigen und für 100 m Straße 25 Minuten.
Für eine beliebige Straßenlänge $x = L_{Straße}$ benötigen Sie also

$$f(x) = 1\ Minute \cdot \frac{x}{4\ m}.$$

Benötigen Sie zusätzlich z.B. eine Startzeit von 5 Minuten ändert sich Ihre Funktion so (mit Konstante):

$$f(x) = 1\ Minute * \frac{x}{4\ m} + 5\ Minuten$$

Abbildung 2 Asphaltfertiger, © Heinen, TH Köln

Quadratische Funktion: Asphaltieren Sie die Fläche eines Fußballfelds (L x B mit L=2B z.B.: 100 m x 50 m) und Ihr Fertiger kann eine Breite von 10 m erreichen, können Sie dies mit folgender Formel berechnen:

$$f(L,B) = 1\ Min \cdot \frac{L}{4\ m} \cdot \frac{B}{10\ m} + 5\ Min = 1\ Min \cdot \frac{2B}{4\ m} \cdot \frac{B}{10\ m} + 5\ Min = 1Min \cdot \frac{B^2}{20\ m^2} + 5\ Min$$

Somit könnten Sie das Fußballfeld asphaltieren in:

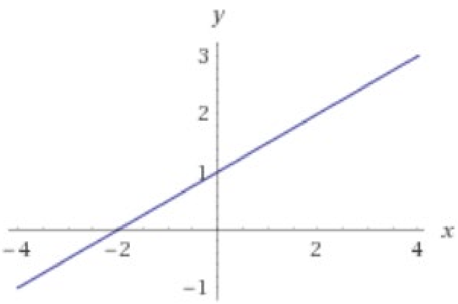
$$f(x) = 1\ Min \cdot \frac{(50\ m)^2}{20\ m^2} + 5\ Min = 1\ Min \cdot \frac{2500\ m^2}{20\ m^2} + 5\ Min = 1\ Min \cdot 125 + 5\ Min = 130\ Min$$

Funktionen beschreiben eine Zuordnungsvorschrift für Elemente einer Definitionsmenge $x \in M$ zu Elementen einer Zielmenge $y \in N$.

$$f: M \to N$$

Falls mehrere Werte zu einem Wert zugeordnet werden, spricht man von einer *Relation*.

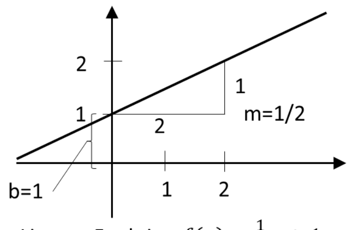
Zur *Darstellung* von Funktionen wird ein *Kartesisches Koordinatensystem* verwendet mit zwei rechtwinklig aufeinander stehenden Achsen. Jedem eindeutigen Wert x wird ein Wert y zugeordnet und eigezeichnet. Ist die Funktion vollständig definiert ergibt sich ein *Graph*.
Z.B. lineare Funktion: $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$:



6.1 Lineare Funktionen

Eine Funktion vom Typ $f(x) = mx + b$ heißt lineare Funktion oder Gerade. Ist m=0 also $f(x) = b$ wird sie zu einer konstanten Funktion.

Die Funktion einer Geraden besteht aus einer Steigung m, die über ein Steigungsdreieck $\frac{Höhe}{Breite}$ berechenbar ist und einem konstanten Wert, der den Schnittpunkt an der y-Achse definiert.



Lineare Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$

Soll der *Schnittpunkt* der Geraden mit der *x-Achse* berechnet werden, die sog. „Nullstelle", lässt sich die Gleichung umstellen:

$$f(x) = 0 \qquad \Leftrightarrow \quad mx + b = 0$$
$$\Leftrightarrow x = -\frac{b}{m}$$

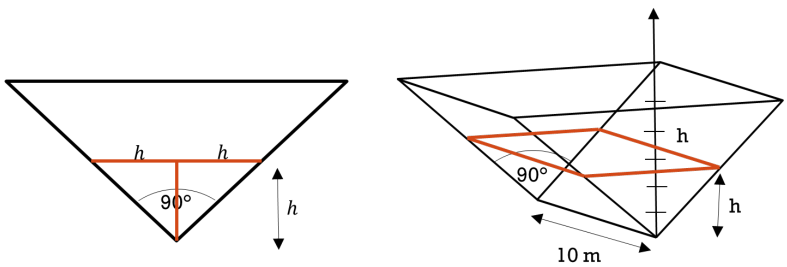
Soll ein *Schnittpunkt zweier Geraden* $(f(x), g(x))$ berechnet werden, müssen diese gleichgesetzt werden und der Schnittpunkt auf x ermittelt werden:

$$f(x) = mx + b \;\; und \;\; g(x) = nx + k$$
$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow mx + b = nx + k$$
$$\Leftrightarrow mx - nx = k - b \Leftrightarrow (m - n) \cdot x = k - b \Leftrightarrow x = \frac{k-b}{m-n}.$$

Der y-Wert wird wieder über Einsetzen berechnet.

6.2 Quadratische Funktion / Parabel

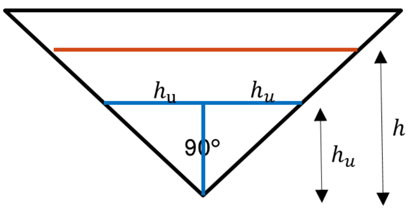
Als erstes ein *Beispiel*:
In einer Müllverbrennungsanlage gibt es einen dreieckigen Schacht, der teilweise mit Müll gefüllt sein kann. Gesucht wird eine Funktion die anhand des Füllstands das Müll-Volumen berechnet.



Der Schacht hat eine Tiefe von 10 m und einen Öffnungswinkel von 90 °. Ermitteln Sie eine Funktion, die abhängig von der Füllstandshöhe h das Volumen berechnet.

$$V(h) = h^2 \cdot 10 \quad \text{/quadratische Funktion}$$

Soll eine Volumenveränderung berechnet werden, verändert sich die Funktion folgendermaßen (mit Konstante)



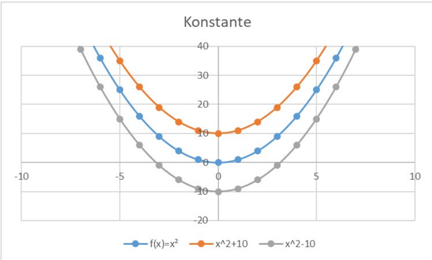
$$V(h) = h^2 \cdot 10 - h_u^2 \cdot 10 \quad \text{/quadratische Funktion mit Konstante}$$

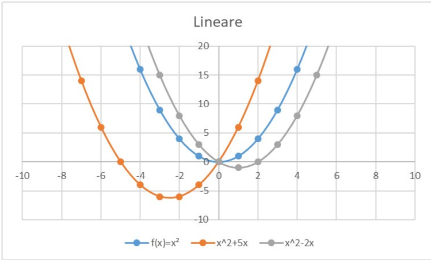
Wird eine quadratische Funktion gezeichnet, entsteht eine sog. Parabel. Eine quadratische Funktion besteht aus drei Teilen:

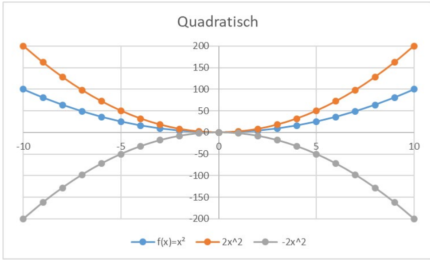
$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Quadratisch • Verzerrung • Vorzeichenwechsel	Linear Verschiebung in x, y-Richtung (Vorsicht!)	Konstante Höhenverschiebung

Wird nur einer der drei Teile verändert, wird die Parabel verschoben oder gedehnt bzw. gespiegelt.







Kennzeichnende Punkte einer Parabel sind der Scheitel und die Nullstellen und können wie folgt bestimmt werden:
Scheitelform: Um den höchsten (tiefsten) Punkt den sog. Scheitel einer Parabel zu bestimmen, muss die Funktion in die Scheitelform gebracht werden. Dazu wird links allgemein und rechts im Beispiel zunächst der Faktor vor dem quadratischen Teil ausgeklammert, dann quadratisch ergänzt und nach der Binomischen Formel ($(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$) zusammengefasst.

$$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad f(x) = 2x^2 + 4x + 10$$

$$f(x) = a \cdot (x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}) \qquad f(x) = 2(x^2 + 2x + 5\,)$$

$$f(x) = a \cdot (x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}) \qquad f(x) = 2(x^2 + 2x + \left(\frac{2}{2}\right)^2 - \left(\frac{2}{2}\right)^2 + 5)$$

$$f(x) = a \cdot (\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}) \qquad f(x) = 2(x+1)^2 + 8$$

Nun kann der Scheitelpunkt abgelesen werden:

$$Scheitelp.: x = -\frac{b}{2a},\; y = -\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} \qquad Scheitelp.: x = -1\,;\; y = 8$$

Dazu zwei Beispiele:

Links:

$$f(x) = x^2 + 5x$$

$$f(x) = x^2 + 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2$$

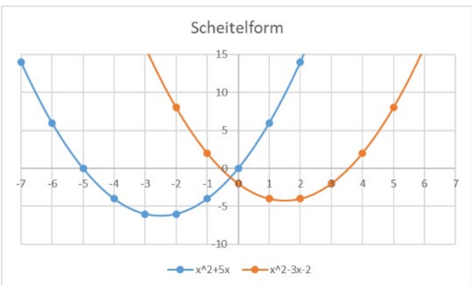
$$f(x) = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$$

Rechts:

$$f(x) = x^2 - 3x - 2$$

$$f(x) = x^2 - 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2$$

$$f(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{17}{4}$$



$$Scheitelp.: x = -\frac{5}{2},\; y = -\frac{25}{4} \qquad Scheitelp.: x = -\frac{5}{2},\; y = \frac{25}{4}$$

Nullstellen: Um die Nullstellen, also die Schnittpunkte mit der X-Achse einer quadratischen Funktion zu berechnen, wird diese gleich Null gesetzt und die Gleichung gelöst. Es gibt mehrere Verfahren zu Lösung von quadratischen Gleichungen, hier das Verfahren mittels pq-Formel:

$$x^2 + px + q = x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Pq-Formel angewendet auf die Beispiele von oben:

$f(x) = x^2 + 5x$

$x_{1,2} = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 0}$

$\Rightarrow x_1 = -\frac{5}{2} + \frac{5}{2} = 0 \quad x_2 = -\frac{5}{2} - \frac{5}{2} = -5$

$f(x) = x^2 - 3x - 2$

$x_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2}$

$\Rightarrow x_1 = \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{17}{4}} \quad x_2 = \frac{3}{2} - \sqrt{\frac{17}{4}}$

Möglich sind bei einer quadratischen Funktion keine bis zwei Nullstellen, je nachdem wo der Scheitelpunkt liegt und in welche Richtung sich die Funktion öffnet.

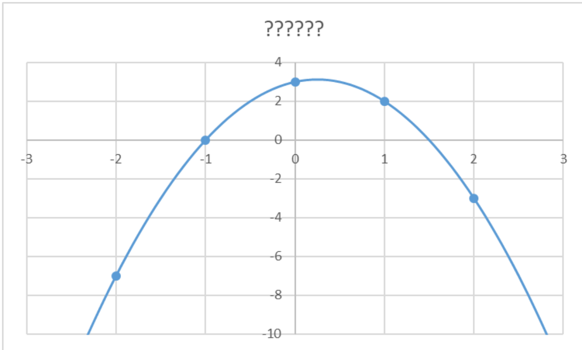
Eine quadratische Funktion kann aus drei Punkten ermittelt werden:
Punkte: $P_1(0;3) \quad P_2(1;2) \quad P_3(-1;0)$

$f(x) = ax^2 + bx + c$

(1) $f(0) = 3 \Rightarrow a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 3 \Rightarrow c = 3$

(2) $f(1) = 2 \Rightarrow a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 2 \Rightarrow a = -1 - b$

(3) $f(-1) = 0 \Rightarrow a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c = 0$
$\Rightarrow b = 3 + a = 3 + (-1 - b)_{aus\,(2)} \quad \Rightarrow b = 1$
$a = -1 - b = -1 - 1_{aus\,(3)} \Rightarrow a = -2$



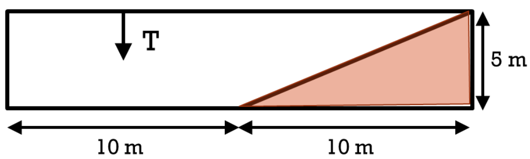
6.3 Aufgaben

A6.1. Wandeln Sie die Funktion in die Scheitelform um:
$f(x) = 3x^2 + 6x - 9$

A6.2. Berechne Funktionsterm, der durch folgende Punkte läuft:
$P_1 = (1;0);\ P_2 = (0,-3);\ P_3 = (-1;2)$

A6.3. Berechne Schnittpunkte zweier Funktionen:
$\mathrm{f(x)} = x^2 + 3x$ und $g(x) = -2x^2 + 3x + 4$

A6.4. Eine 10 m breite Baugrube wird ausgehoben: Ermitteln Sie den Funktionsterm für das ausgehobene Material in Abhängigkeit der gegrabenen Tiefe T



6.4 Weitere Funktionen und Begriffe

Auch für Funktionen höheren Grades lassen sich Maxima und Minima, sowie Nullstellen berechnen, hierzu siehe das Thema Funktionsdiskussion in der Vorlesung Mathematik 1. Auch Betrag- und Wurzelfunktionen sowie Logarithmus- und Exponentialfunktionen werden Sie im Studium treffen. Um Funktionen zu beschreiben werden eine Reihe mathematische Begriffe verwendet, die sie kennen sollten:

- Translation: Parallele Verschiebung aller Punkte einer Funktion
- Skalierung: Vergrößerung/Verkleinerung um einen Faktor
- Symmetrie: Spiegelung der Funktion gegenüber einer gedachten Achse
- Konvergent/ Divergent: Funktion nähert sich einem (/Div: keinem) Wert an
- streng monoton steigend /fallend: Funktion verläuft streng =nur nach oben/unten
- Kurvenschar: Funktionen gleichen Typs, die sich nur durch einen Parameter unterscheiden.

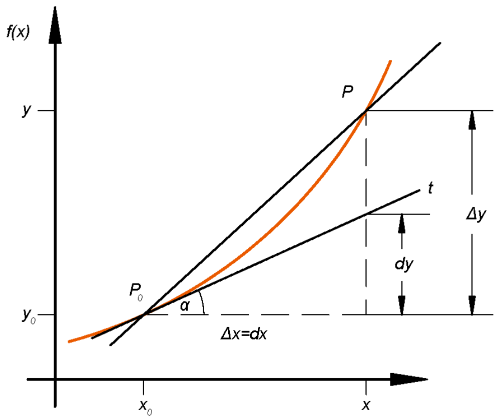
7 Analysis

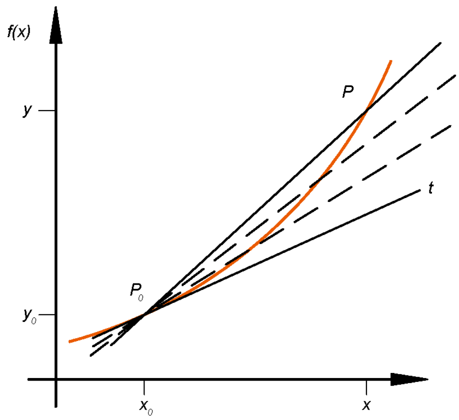
Prof. Dr.-Ing. Knud Sauermann

Die Analysis beschäftigt sich im Wesentlichen mit Funktionen und deren Eigenschaften. Dabei bilden Themen wie Stetigkeit und Grenzwert einer Funktion sowie die Differential- und Integralrechnung die Schwerpunkte in der mathematischen Schulausbildung. Um den Umfang dieses Skriptes nicht zu sprengen ist auf die Vermittlung der theoretischen Grundlagen der Analysis hier verzichtet worden. Vielmehr wird der Schwerpunkt auf die Anwendung der Differential- und Integralrechnung gelegt.

7.1 Differentialrechnung

Ausgehend von differenzierbaren Funktionen wird zunächst über die Steigung einer beliebigen Kurve der sogenannte Differenzenquotient hergeleitet.





$h = \Delta x = x - x_0 \neq 0$ $\qquad$ $x = x_0 + h = x_0 + \Delta x$

Der Differenzenquotient lautet demnach:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{x_0 + \Delta x - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \in \mathbb{R}$$

und kann als Steigung der Sekante zwischen den Punkten P und P_0 interpretiert werden.

Für den Grenzübergang von P -> P_0 erhält man aus dem Differenzenquotienten den sogenannten Differentialquotienten, der die Steigung der Tangente in dem Punkt P_0 angibt:

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{x_0 + \Delta x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$f'(x_0)$ wird als erste Ableitung an der Stelle x_0 bezeichnet. Der Differenzialquotient ist somit der Grenzwert des Differenzenquotienten. Im Folgenden werden die Ableitungsregeln zusammengefasst.

7.1.1 Ableitungsregeln

Seien f und g differenzierbare Funktionen, dann sind auch die verknüpften Funktionen

$$f + g, \quad f - g, \quad f + \beta \cdot g, \quad f \cdot g, \quad \frac{f}{g}$$

differenzierbar mit:

$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$ **Summenregel**

$\big(f(x) \cdot g(x)\big)' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ **Produktregel**

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$ **Quotientenregel**

$$\big(c\cdot f(x)\big)' = c\cdot f'(x)$$ **Faktorregel**

$$[\alpha\cdot f(x) + \beta\cdot g(x)]' = \alpha\cdot f'(x) + \beta\cdot g'(x)$$ **Linearität**

Beispiel: Produktregel

$f(x) = u \cdot v \quad\rightarrow\quad f'(x) = u' \cdot v + u \cdot v'$

$f(x) = \sin(x)\cdot e^x \quad\rightarrow\quad f'(x) = (\sin(x))'\cdot e^x + \sin(x)\cdot(e^x)'$

$f'(x) = \cos(x)\cdot e^x + \sin(x)\cdot e^x$

$f'(x) = (\cos(x) + \sin(x))\cdot e^x$

Die zweite Ableitung resultiert ebenfalls aus der Anwendung der Produktregel:

$f''(x) = (\cos(x) + \sin(x))'\cdot e^x + (\cos(x) + \sin(x))\cdot(e^x)'$

$f''(x) = (-\sin(x) + \cos(x))\cdot e^x + (\cos(x) + \sin(x))\cdot e^x$

$f''(x) = (-\sin(x) + \cos(x) + \cos(x) + \sin(x))\cdot e^x$

$f''(x) = 2\cos(x)\cdot e^x$

Beispiel: Quotientenregel

$$f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$f'(x) = (\tan(x))' = \frac{(\sin(x))'\cdot\cos(x) - \sin(x)\cdot(\cos(x))'}{[\cos(x)]^2}$$

$$f'(x) = (\tan(x))' = \frac{\cos(x)\cdot\cos(x) - \sin(x)\cdot(-\sin(x))}{\cos^2(x)}$$

$$f'(x) = (\tan(x))' = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

$$f'(x) = (\tan(x))' = \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)} + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x) = \tan^2(x) + 1$$

Die Kettenregel findet Ihre Anwendung bei der Ableitung von verknüpften Funktionen f und g. Seien f und g differenzierbar mit $\mathbb{W}_g \subset \mathbb{D}_f$, dann ist $h = f\circ g$ mit $h(x) = f\big(g(x)\big)$ differenzierbar, und es gilt:

$$h'(x) = f'\big(g(x)\big)\cdot g'(x)$$

Die praktische Vorgehensweise basiert in den meisten Fällen auf der Anwendung der Substitutionsmethode, indem man mit einer neuen Variablen z die Funktion $g(x)$ substituiert: $z = g(x)$

$$h(x) = f\big(g(x)\big) = f(z)$$

Die äußere Funktion lautet demnach: $f(z)$

mit der zugehörigen Ableitung: $f'(z)$

Die innere Funktion lautet: $z = g(x)$

mit der zugehörigen Ableitung: $g'(x)$

Somit folgt aus der Definition:

$$h'(x) = f'(z) \cdot g'(x) = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$$

<u>Beispiel:</u> Quotientenregel

$h(x) \quad = \sqrt{\tan(2x)} \quad = \sqrt{z} \qquad$ mit $z = \tan(2x)$

$$\begin{aligned} h'(x) &= \tfrac{1}{2\sqrt{z}} \cdot \ [\tan(2x)]' \qquad \text{und mit } t = 2x \text{ gilt} \\ &= \tfrac{1}{2\sqrt{z}} \cdot \ [1 + \tan^2(t)] \cdot (2x)' \\ &= \tfrac{1}{2\sqrt{z}} \cdot \ [1 + \tan^2(t)] \cdot 2 \\ &= \tfrac{1}{2\sqrt{\tan(2x)}} \cdot [1 + \tan^2(2x)] \cdot 2 \\ &= \tfrac{1+\tan^2(2x)}{\sqrt{\tan(2x)}} \end{aligned}$$

7.1.2 Geometrische Bedeutung der Ableitungen

Die Ableitungen einer Funktion besitzen besondere Eigenschaften, die gerade bei den Anwendungen der Differentialrechnung von großer Bedeutung sind. Im Folgenden werden die wichtigsten Ableitungen und deren geometrische Bedeutung zusammengefasst.

<u>1. Ableitung:</u>	$y' = f'(x)$	gibt die Steigung der Kurventangente an und ermöglicht somit eine Aussage zu dem <u>Monotonieverhalten</u> der Funktion
	$f'(x_0) > 0$	Funktionskurve <u>wächst</u> streng monoton bei dem Durchgang durch $P(x_0; y_0)$
	$f'(x_0) < 0$	Funktionskurve <u>fällt</u> streng monoton bei dem Durchgang durch $P(x_0; y_0)$
<u>2. Ableitung:</u>	$y'' = f''(x)$	beschreibt das Monotonieverhalten von $f'(x)$ und bestimmt damit das <u>Krümmungsverhalten</u> der Funktionskurve
	$f''(x_0) > 0$	Steigung der Kurventangente nimmt zu, d.h. Kurve mit „<u>Linkskrümmung</u>“ (konvexe Krümmung)
	$f''(x_0) < 0$	Steigung der Kurventangente nimmt ab, d.h. Kurve mit „<u>Rechtskrümmung</u>“ (konkave Krümmung)

7.2 Integralrechnung

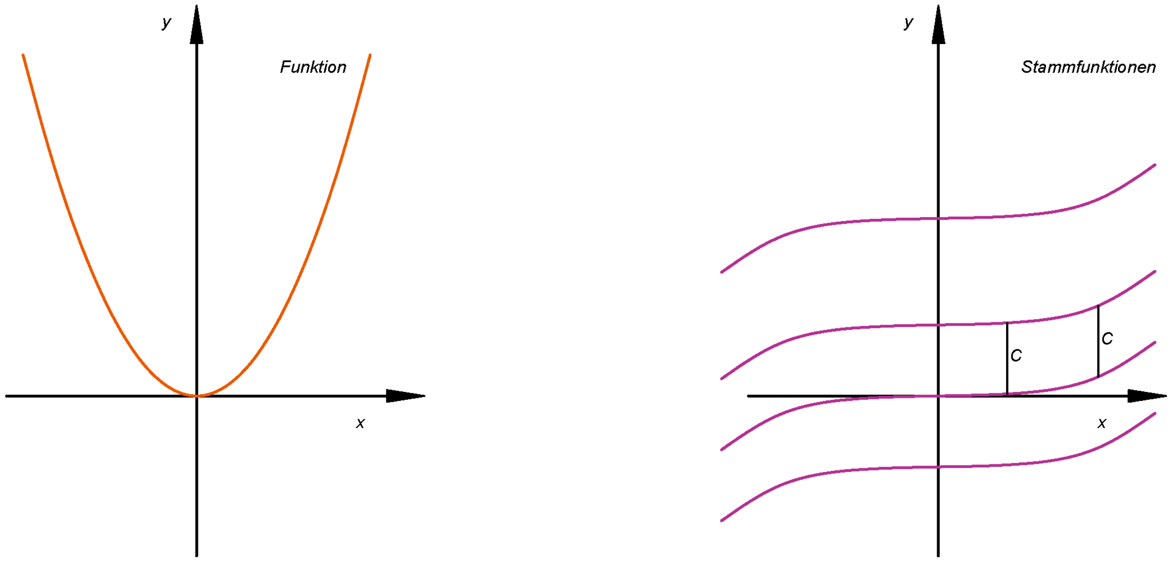
Die Umkehrung der Differenzialrechnung führt zu der Integralrechnung, d.h. wir suchen zu einer gegebenen Funktion $f(x)$ eine Funktion $F(x)$, deren Ableitung $f(x)$ ergibt: $F'(x) = f(x)$.

7.2.1 Das unbestimmte Integral

Gegeben sei eine Funktion $f(x)$ mit dem Definitionsbereich $\mathbb{D}_f$. Die Funktion $F(x)$ heißt Stammfunktion von $f(x)$ (auf $\mathbb{D}_f$ oder einem Teilbereich von $\mathbb{D}_f$), wenn für alle $x \in \mathbb{D}_f$ (oder aus dem Teilbereich von $\mathbb{D}_f$) gilt

$$F'(x) = f(x)$$

Zur Veranschaulichung:



Die Stammfunktion des unbestimmten Integrals ist nicht eindeutig. Mit jeder Stammfunktion $F_1(x)$ von $f(x)$ ist auch $F_2(x) = F_1(x) + C$ ($C =$ beliebige reelle Konstante) eine weitere Stammfunktion.

Die Funktion $f(x)$ sei auf dem Intervall $[a, b]$, $(a < b)$ definiert und stetig, dann existieren unendlich viele Stammfunktionen von $f(x)$ auf $[a, b]$.

Zwei beliebige Stammfunktionen $F_1(x), F_2(x)$ von $f(x)$ auf $[a, b]$ unterscheiden sich demnach nur um eine Konstante; d.h.

$$F_2(x) = F_1(x) + C$$

Statt $F(x)$ ist Stammfunktion von $f(x)$ sagt man auch: $F(x)$ ist (unbestimmtes) Integral von $f(x)$ und schreibt:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

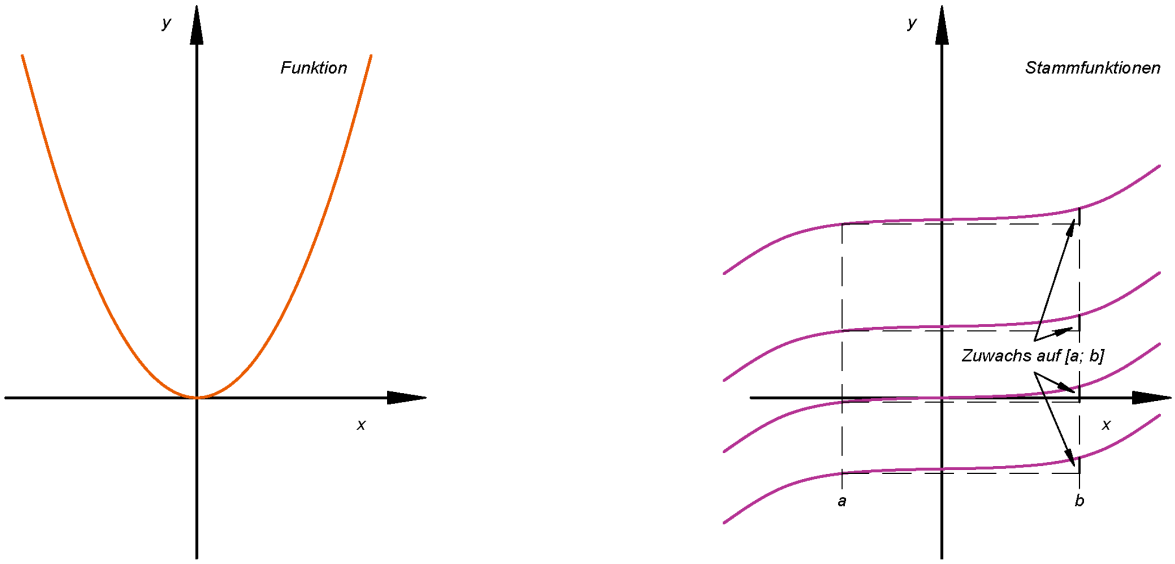
Dabei ist	x	die Integrationsvariable
	C	die Integrationskonstante
	$F(x)$	eine der unendlich vielen Stammfunktionen.

7.2.2 Das bestimmte Integral

Die Funktion $f(x)$ habe auf dem Intervall $[a, b]$ eine Stammfunktion $F(x)$. Dann heißt der Zuwachs dieser Funktion auf diesem Intervall **bestimmtes Integral** von $f(x)$ auf $[a, b]$, mit

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

a und b bezeichnet man als die Integrationsgrenzen.



Man schreibt auch:

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b$$

Das unbestimmte Integral ist eine Funktion, aber das bestimmte Integral mit festen Integrationsgrenzen a und b ist im Ergebnis eine reelle Zahl.

7.2.3 Rechenregeln

Die folgenden Regeln ergeben sich aus den Rechenregeln für Stammfunktionen und der Definition des bestimmten Integrals. Dabei wird vorausgesetzt, dass die angegebenen Integrale existieren.

– <u>Bezeichnung der Integrationsvariablen</u>

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(\xi)\,d\xi$$

– <u>Konstante Faktoren können vor das Integral gezogen werden</u>

$$\int_a^b C \cdot f(x)\,dx = \mathrm{C} \cdot \int_a^b f(x)\,dx$$

– <u>Vertauschen von Integration und Summation</u>

$$\int_a^b f(x) \pm \mathrm{g}(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$

– <u>Vertauschen der Integrationsgrenzen ändert das Vorzeichen</u>

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

– <u>Integrationsintervall der Länge 0</u>

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

– Zerlegung des Integrationsintervalls

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

– Symmetrie

– Für ungerade Funktionen $f(x)$ gilt

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$

– Für gerade Funktionen $f(x)$ gilt

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2 \cdot \int_0^a f(x)\,dx$$

Beispiele zur Berechnung eines bestimmten Integrals

1.) $f(x) = -x + 2$ und $F(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$

und $F'(x) = -x + 2$

$$\int_2^4 (-x+2)\,dx = \left[-\frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_2^4 = -\frac{1}{2}\cdot 4^2 + 2\cdot 4 - \left(-\frac{1}{2}\cdot 2^2 + 2\cdot 2\right) = -2$$

2.) $f(x) = x^3$ und $F(x) = \frac{1}{4}x^4$

und $F'(x) = x^3$

$$\int_{-1}^{1} x^3\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{4}\cdot 1^4 - \frac{1}{4}\cdot(-1)^4 = 0$$

3.) $f(x) = \frac{1}{x}$ und $F(x) = \ln|x|$

und $F'(x) = \frac{1}{x}$

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = [\ln|x|]_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$$

7.3 Aufgaben

Differentialrechnung

A7.1. Berechnen Sie die 1. Ableitung $f'(x)$

a) $f(x) = x^2 + 3x$

b) $f(x) = 3x^2 \cdot \sin x$

c) $f(x) = x^7$

d) $f(x) = x^{\frac{7}{3}}$

e) $f(x) = \frac{5x-1}{2x+3}$

f) $f(x) = \frac{1}{x^2+3x}$

A7.2. Berechnen Sie die höheren Ableitungen von $f(x) = 4x^4 - 12x^3 + 5x - 2$
Berechnen Sie $f'(x), f''(x), f'''(x), f^{(4)}(x), f^{(5)}(x), f^{(6)}(x)$

A7.3. Berechnen Sie mit Hilfe der Kettenregel $h'(x)$

$$h(x) = (1 - x^2)^9$$

A7.4. Berechnen Sie die zweite Ableitung und die Wendestellen der Funktion $f(x) = x \cdot e^{x^2}$

Integralrechnung

A7.5. Bestimmen Sie die Stammfunktion $F(x)$ von $f(x)$

a) $f(x) = x^2 - 2x - 3$

b) $f(x) = \sin x$

c) $f(x) = e^x$

A7.6. Lösen Sie die folgenden unbestimmten Integrale

a) $\int x^3 \, dx$

b) $\int \cos x \, dx$

c) $\int x^4 - 3x^2 + 1 \, dx$

A7.7. Lösen Sie die folgenden bestimmten Integrale

a) $\int_0^{\pi} \sin x \, dx$

b) $\int_2^6 x \, dx$

c) $\int_1^4 2x - 4x^3 \, dx$

8 Trigonometrie

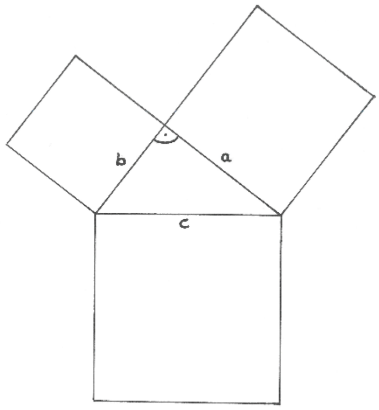
Prof. Dr.-Ing. Ansgar Neuenhofer und Dipl.-Ing. Ernst-Jürgen Wilke

8.1 Betrachtung der Seiten im rechtwinkligen Dreieck

8.1.1 Satz des Pythagoras

Die Summe der beiden Quadrate über den Katheten ist genauso groß, wie das Quadrat über der Hypotenuse.

$$a^2 + b^2 = c^2$$



8.1.2 Strahlensätze

a) Erster Strahlensatz

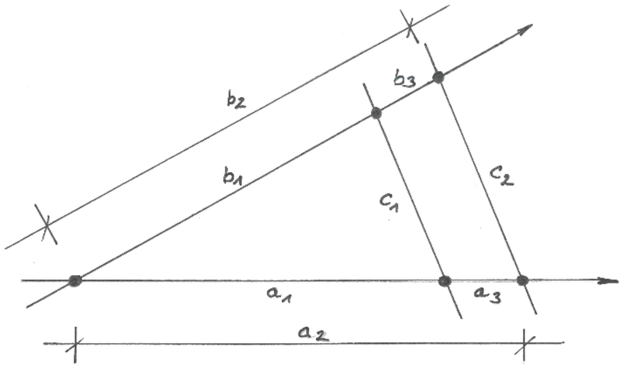
bezieht sich auf Abschnitte auf den Strahlen

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \text{ und } \frac{a_1}{a_3} = \frac{b_1}{b_3}$$

b) Zweiter Strahlensatz

bezieht sich auf Abschnitt auf einem Strahl und Abschnitte auf den Parallelen

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{a_1}{a_2} \text{ und } \frac{c_1}{c_2} = \frac{b_1}{b_2}$$



8.1.3 Ähnlichkeit

Gleiche Winkel, ungleiche Strecken, auch Spiegelung möglich

8.1.4 Kongruenz

bedeutet deckungsgleich, d.h. in Form und Größe gleich

8.2 Steigungsdreiecke

8.2.1 als Prozentzahl

gibt an, um wie viel Meter das Gelände auf 100m Horizontale ansteigt

$$\frac{p}{100} = \frac{\Delta h}{s}$$

8.2.2 Böschungs-/Steigungsverhältnis

$$\frac{1}{n} = \frac{\Delta h}{s}$$

8.2.3 Neigung in Grad

Die Bestimmung des Winkels α aus einer gegebenen Steigung in Prozent oder aus den entsprechenden Strecken, fällt in das Aufgabengebiet der trigonometrischen Funktionen.

8.3 Bestimmung eines Winkels

Die Größe eines Winkels, das Winkelmaß, lässt sich auf verschiedene Arten angeben.

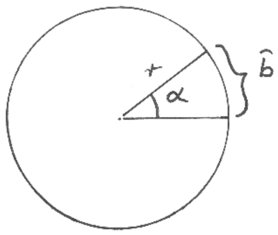
Bei allen Möglichkeiten geht man davon aus, dass ein Vollwinkel (=360°) in gleiche Sektoren unterteilt wird.

8.3.1 Gradmaß

Teilt man einen Kreis in 360 gleiche Sektoren, so entstehen 360 Einheitswinkel mit der Größe 1°.

8.3.2 Bogenmaß

Zu jedem Winkel α (im Gradmaß angegeben) gibt es genau einen Bogen b, den dieser aus der Kreisperipherie ausscheidet.



$$\frac{2\pi r}{b} = \frac{360}{\alpha}$$

8.3.3 Umrechnung Gradmaß/Bogenmaß

Annahme: $r = 1$

G → B $\quad b = \alpha \cdot \frac{\pi}{180}$

B → G $\quad \alpha = b \cdot \frac{180}{\pi}$

8.4 Trigonometrische Winkelfunktion

8.4.1 Sinusfunktion

$$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{a}{c}$$

8.4.2 Kosinusfunktion

$$\cos\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{b}{c}$$

8.4.3 Tangensfunktion

$$\tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{a}{b}$$

8.4.4 Kotangensfunktion

$$\cot\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}} = \frac{b}{a}$$

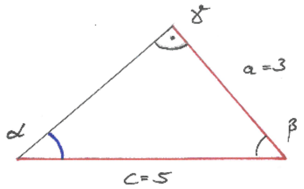
8.5 Fallbeispiele

8.5.1 Berechnung fehlender Winkel

a) Arkussinus

gegeben: a und c gesucht: α

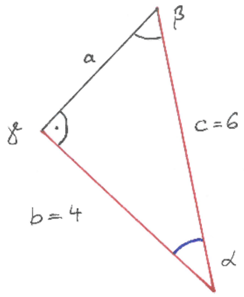
Lösung: $\alpha = \arcsin \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$



b) Arkuskosinus

gegeben: b und c gesucht: α

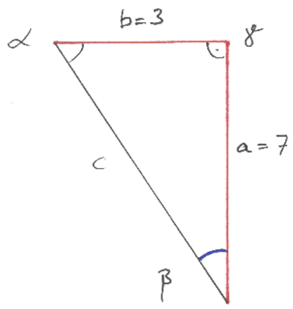
Lösung: $\alpha = \arccos \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$



c) Arkustangens

gegeben: a und b gesucht: β

Lösung: $\beta = \arctan \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$

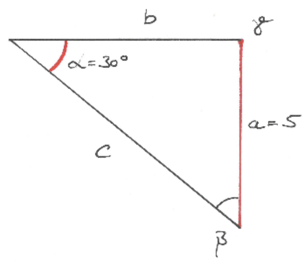


8.5.2 Berechnung fehlender Seiten

a) Sinus

gegeben: α und a gesucht: c

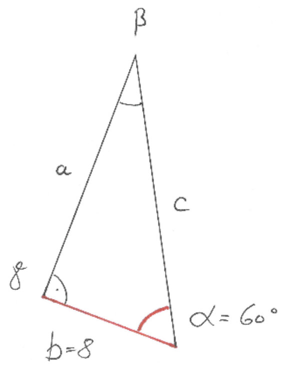
Lösung: $c = \frac{\text{Gegenkathete}}{\sin \alpha}$



b) Kosinus

gegeben: α und b gesucht: c

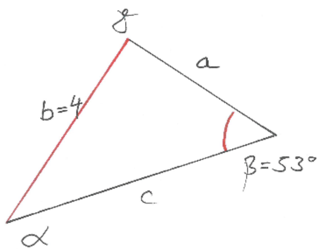
Lösung: $c = \frac{\text{Ankathete}}{\cos \alpha}$



c) Tangens

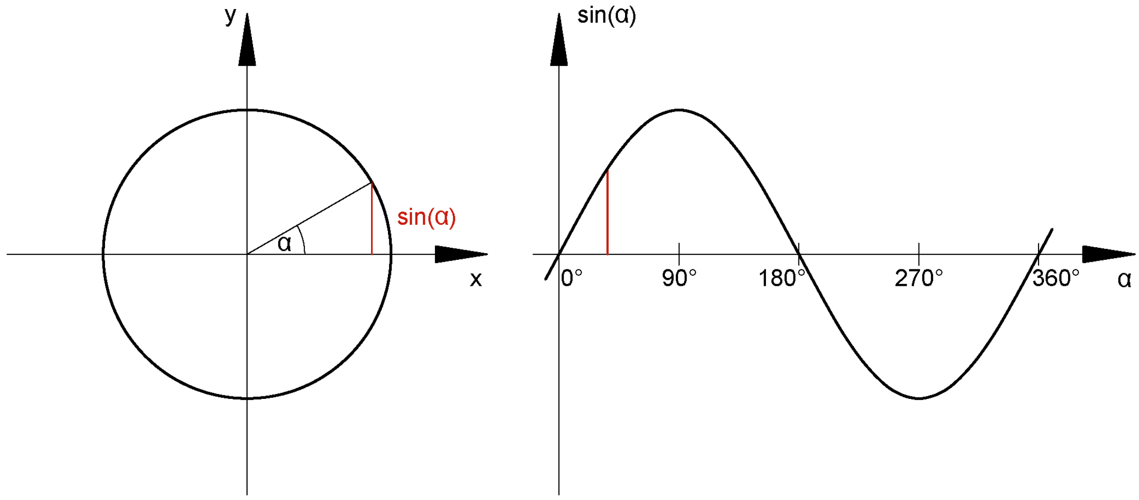
gegeben: β und b gesucht: a

Lösung: $a = \frac{\text{Gegenkathete}}{\tan \beta}$

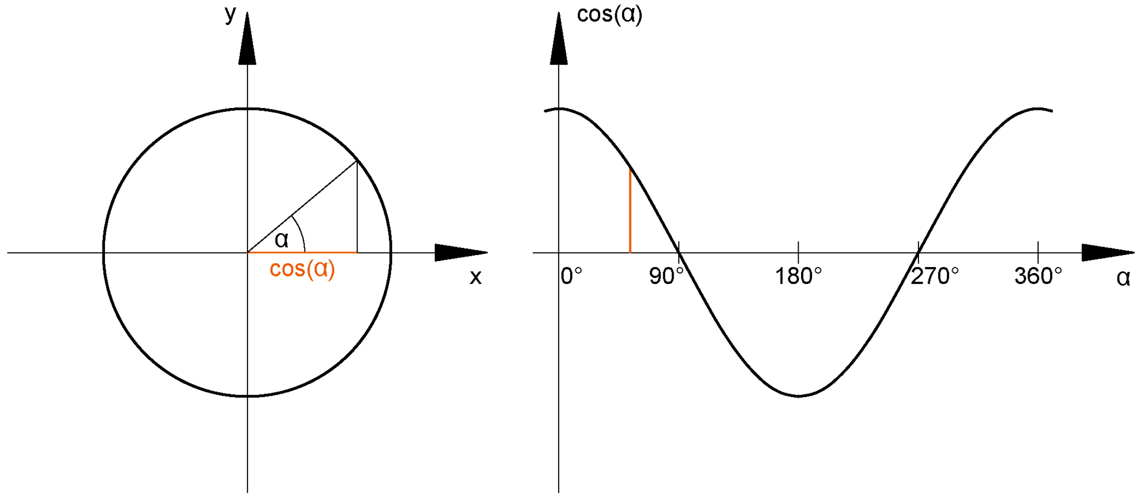


8.6 Graphische Darstellung der Funktionen

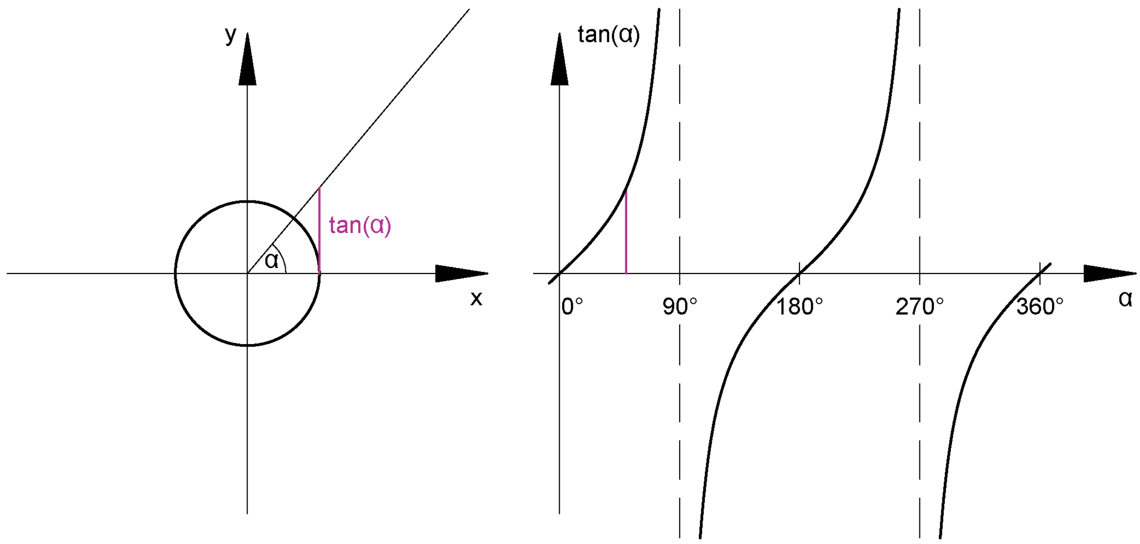
8.6.1 Sinusfunktion



8.6.2 Kosinusfunktion



8.6.3 Tangensfunktion

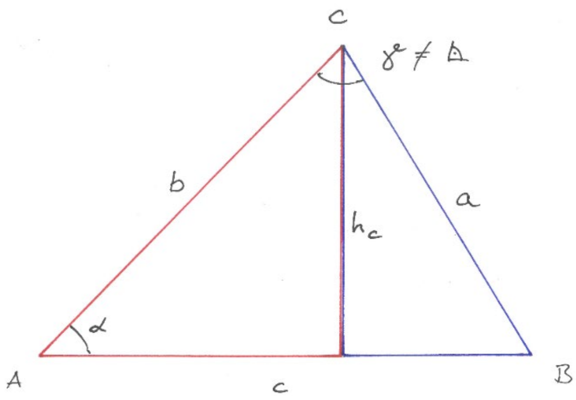


8.7 Betrachtung nicht-rechtwinkliger Dreiecke

8.7.1 Der Sinussatz

Jeweils zwei Seiten eines beliebigen Dreieckes verhalten sich zueinander wie die Sinuswerte ihrer gegenüberliegenden Winkel.

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$$



8.7.2 Der Kosinussatz

$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos\alpha$

$b^2=a^2+c^2-2ac\cdot\cos\beta$

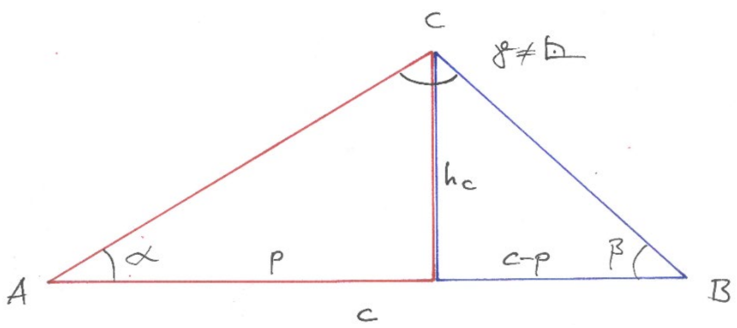
$c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos\gamma$

Umgestellt:

$$\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$\cos\beta=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$$

$$\cos\gamma=\frac{a^2+b^2-c}{2ab}$$



8.8 Aufgaben

A8.1. Formen Sie um: (Beispiel: $4°6' = 4{,}1°$ *oder* $4{,}75° = 4°45'$)

a) $12°14'$

b) $23{,}16°$

c) $120{,}77°$

d) $52°16'$

e) $55{,}55°$

f) $80{,}776°$

A8.2. Schreiben Sie folgende Bogenmaße als Gradmaß: (TIPP: $\cdot\frac{180}{\pi}$)

a) 0,5

b) 3,14

c) $\frac{\pi}{3}$

d) $\frac{-\pi}{5}$

e) $\frac{2}{3}\pi$

f) 4

g) -2

A8.3. Schreiben Sie folgende Gradmaße als Bogenmaß: (TIPP: $\cdot\frac{\pi}{180}$)

a) 1°

b) 10°

c) 15°

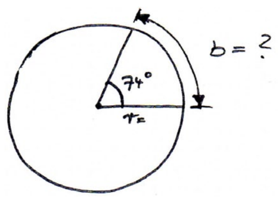
d) 60°

e) 360°

f) 540°

g) -3600°

A8.4. In einem Kreis mit dem Radius $r = 65$ Meter ist ein Mittelpunktswinkel mit $\alpha = 74°$ eingezeichnet. Wie lang ist der Bogen b, den der Winkel aus der Kreisperipherie ausschneidet?



A8.5. Skizzieren Sie die Graphen der

a) Sinusfunktion

b) Kosinusfunktion

c) Tangensfunktion

A8.6. Bestimmen Sie mit Hilfe des Taschenrechners:

a) sin 45°

b) sin -12°

c) sin 220°

d) cos 35°

e) cos –27°

f) cos 380°

g) tan 12°

h) tan -10°

i) tan 350°

A8.7. Bestimmen Sie den / die Winkel im Bereich 0° bis 360° für:

a) $\sin \alpha =\ 0{,}8$

b) $\sin \alpha =$ - 0,5

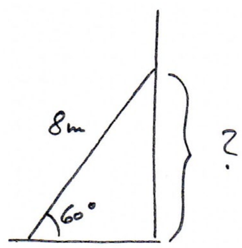
c) $\cos \alpha =$ -1

d) $\cos \alpha =\ 0{,}5$

e) $\tan \alpha =$ -2

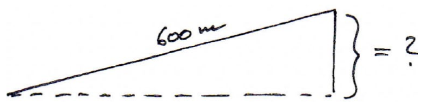
f) $\tan \alpha =$ -2

A8.8. Eine 8 Meter lange Leiter wird unter einem Winkel von 60° (von der Horizontalen) an eine Hauswand angelehnt. Wie hoch reicht Sie?

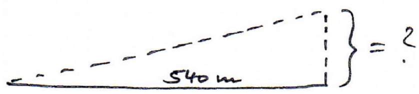


A8.9. Welchen Höhenunterschied überwindet eine Straße mit 12% Steigung

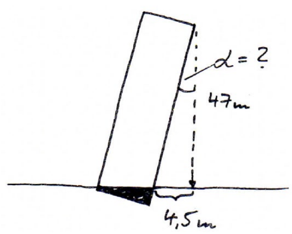
a) auf einer Straßenlänge von 600 Metern?



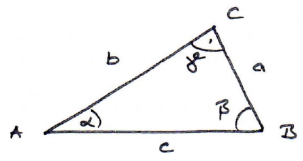
b) auf einer Horizontaldifferenz von 540 Metern?



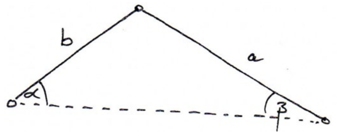
A8.10. Der schiefe Turm von Pisa ist 47 Meter hoch und ragt oben etwa 4,50 Meter über die Senkrechte hinaus. Um wieviel Grad weicht der Turm von der Senkrechten ab?



A8.11. Berechnen Sie die fehlenden Größen in einem rechtwinkligen Dreieck:
$\gamma = 90°$, $a = 7$ m, $b = 6$ m



A8.12. In einem (nicht – rechtwinkligen) Dreieck sind die Seiten $a = 5$ m und $b = 4$ m bekannt sowie der Winkel $\alpha = 70°$.
Der Winkel β soll ermittelt werden. (TIPP: Sinussatz)



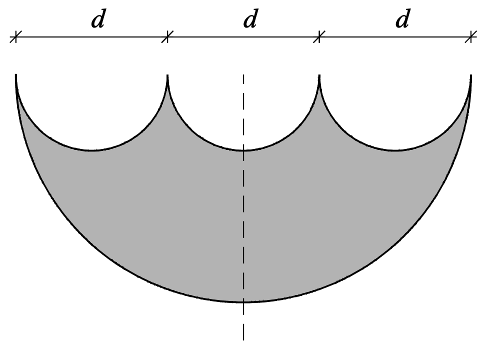
A8.13. Bei einem olympischen Speerwurfwettbewerb wird die geworfene Weite ermittelt, indem von einem seitlich gelegenen Standpunkt aus die Strecke $S1 = 45$ Meter zur Abwurflinie und die Strecke $S2 = 62$ Meter zum Einstichpunkt gemessen wird sowie der dadurch eingeschlossene Winkel $\alpha = 117°$.
Berechnen Sie die Wurfweite. (TIPP: Kosinussatz)

9 Geometrie

Prof. Dr.-Ing. Ansgar Neuenhofer

9.1 Beispiele

Beispiel 1
Bestimmen Sie Größe und Umfang der gekennzeichneten, aus Halbkreisen zusammengesetzten Fläche als Funktion von d .



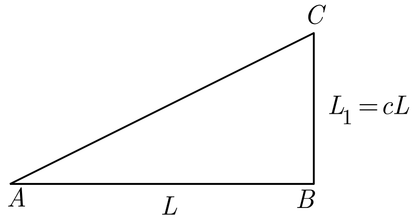
Lösung
Wir erhalten die gesuchte Fläche, indem wir von einem Halbkreis mit Radius $1,5\,d$ drei Halbkreise mit Radius $0,5\,d$ subtrahieren. Somit

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\left(1,5\,d\right)^2 - 3\cdot\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\left(0,5\,d\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\left(1,5^2 - 3\cdot 0,5^2\right)d^2 \\ &= 0,75\cdot\pi\cdot d^2 \\ &\approx 2,356\,d^2 \end{aligned}$$

Der Umfang ergibt sich als Summe aus der Länge eines Halbkreisbogens mit Radius $1,5\,d$ und der Länge dreier Halbkreise mit Radius $0,5\,d$

$$\begin{aligned} U &= \pi\cdot 1,5\,d + 3\cdot\pi\cdot 0,5\,d \\ &= 3\pi\,d \\ &\approx 9,425\,d \end{aligned}$$

Beispiel 2
Sie haben zwei Möglichkeiten, um von A nach C zu gelangen: (I) Zunächst von A nach B entlang einer Strecke L und dann senkrecht dazu von B nach C entlang einer Strecke $L_1 = cL$. (II) Direkt diagonal von A nach C. Für $c = 0,7$: Um wieviel Prozent ist die Strecke II kürzer als die Strecke I?



Lösung

I

$$\begin{aligned} s &= L + L_1 \\ &= L + 0,7\,L \\ &= 1,7L \end{aligned}$$

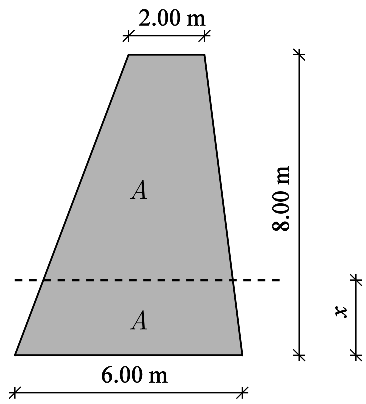
II

$$\begin{aligned} s &= \sqrt{L^2 + L_1^2} \\ &= \sqrt{L^2 + \left(0,7L\right)^2} \\ &= \sqrt{1,49}\,L \\ &= 1,2207\,L \end{aligned}$$

$$1 - \frac{1,2207}{1,7} = 1 - 0,7180 = 0,282$$

Die Strecke II ist um rund 28% kürzer als die Strecke I.

Beispiel 3
In welcher Höhe x müssen wir die gezeigte trapezförmige Platte teilen, so dass zwei gleichgroße trapezförmige Teile entstehen?



Lösung
Die Gesamtfläche beträgt

$$A_{\text{ges}} = \frac{1}{2}\big(6,00 + 2,00\big)\cdot 8,00 = 32\,\text{m}^2$$

Somit muss gelten

$$A = \frac{1}{2}\big(2 + b\big)\big(8 - x\big) = 16 \text{ (obere Hälfte)}$$

bzw. alternativ

$$A = \frac{1}{2}\big(6 + b\big)x \quad = \frac{32}{2} = 16 \text{ (untere Hälfte)}$$

Für die Breite an der Stelle x gilt nach dem Strahlensatz

$$b = b(x) = 6 - \frac{6-2}{8}x = 6 - \frac{1}{2}x$$

Diesen Ausdruck setzen wir in einen der beiden obigen Ausdrücke für A ein (wir wählen den für die untere Hälfte) und erhalten

$$\frac{1}{2}\left(6 + 6 - \frac{1}{2}x\right)x \;= 16$$

Dies ist eine quadratische Gleichung für die Unbekannte x , die wir im Folgenden lösen.

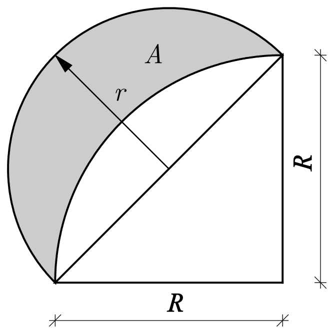
$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left(6 + 6 - \frac{1}{2}x\right)x &= 16\\
6x - \frac{1}{4}x^2 &= 16\\
x^2 - 24x + 64 &= 0\\
x &= 12 \pm \sqrt{12^2 - 64}\\
x_1 &= 3,056\,\text{m}\\
x_2 &= 20,944\,\text{m} > 8,00\,\text{m}
\end{aligned}$$

Ein Schnitt in Höhe von $x = 3,056\,\text{m}$ teilt die gegebene Fläche in zwei gleichgroße Teile. Die Breite an dieser Stelle beträgt

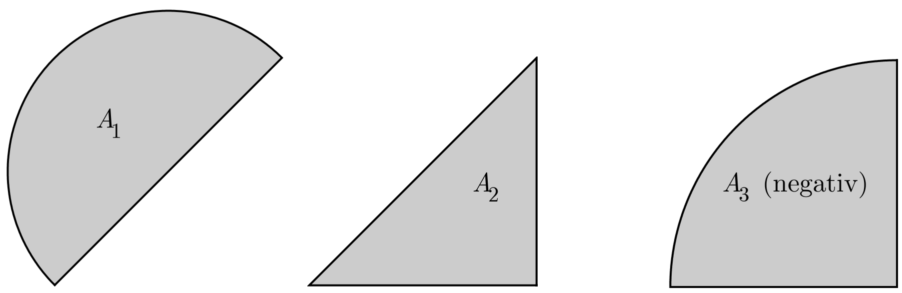
$$b(x = 3,056) = 6 - \frac{1}{2}\cdot 3,056 = 4,472\,\text{m}$$

Beispiel 4

Berechnen Sie den Flächeninhalt der gekennzeichneten Fläche A als Funktion von R .



Lösung
Wie erkennen, dass sich die betreffende Fläche aus drei Teilflächen zusammensetzt, einem Halbkreis, einem Dreieck und einem Viertelkreis, wobei der Viertelkreis ausgespart, d.h. subtrahiert wird.



Folglich

$$A = A_1 + A_2 - A_3$$

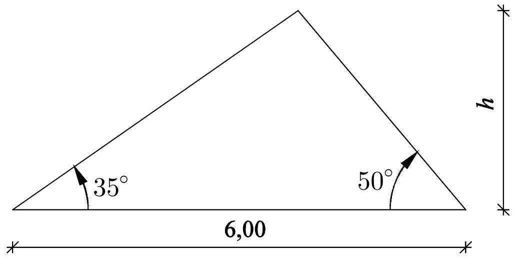
Der Durchmesser des Halbkreises ergibt sich als Hypotenuse im rechtwinkligen, gleichschenkligen Dreieck, somit gilt für dessen Radius r

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{R^2 + R^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} R$$

Damit ergibt sich für die Fläche

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}\pi r^2 + \frac{1}{2}R^2 - \frac{1}{4}\pi R^2 \\ &= \frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}R^2 - \frac{1}{4}\pi R^2 \\ &= \frac{1}{4}\pi R^2 + \frac{1}{2}R^2 - \frac{1}{4}\pi R^2 \\ &= \frac{1}{2}R^2 \end{aligned}$$

Die gesuchte Fläche hat folglich die Größe des Dreiecks A_2 , da Viertel- und Halbkreis sich als gleichgroße Flächen aufheben.



Beispiel 5

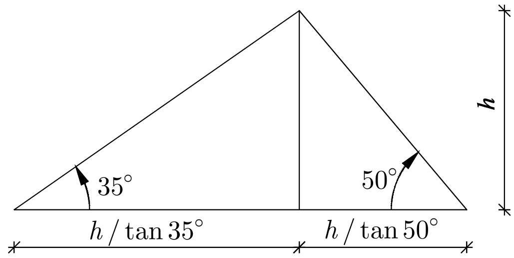
Berechnen Sie die Höhe h im gezeigten Dreieck.

Lösung

Die Höhe teilt das Dreieck in zwei rechtwinklige Dreiecke und stellt in Bezug auf die beiden gegebenen Winkel jeweils die Gegenkathete dar. Die Summe der beiden Ankatheten ergibt die gegebene Seitenlänge von 6,00m. Somit gilt

$$6 = \frac{h}{\tan 35^\circ} + \frac{h}{\tan 50^\circ}$$

$$h = \frac{6}{\dfrac{1}{\tan 35^\circ} + \dfrac{1}{\tan 50^\circ}} = \frac{6 \cdot \left(\tan 35^\circ \cdot \tan 50^\circ\right)}{\tan 35^\circ + \tan 50^\circ} = 2{,}646\,\mathrm{m}$$

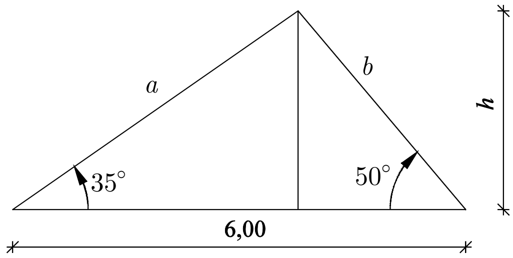


Alternative Lösung

Wir berechnen zunächst mit dem Sinussatz einer der beiden unbekannten Seitenlängen a oder b, d.h. eine Hypotenuse der beiden rechtwinkligen Dreiecke.

$$\frac{a}{6{,}00} = \frac{\sin 50^\circ}{\sin\left(180^\circ - 50^\circ - 35^\circ\right)}$$

$$a = 6{,}00 \cdot \frac{\sin 50^\circ}{\sin 95^\circ} = 4{,}6138\,\mathrm{m}$$



Für die Höhe gilt dann

$$h = a \cdot \sin 35^\circ = 4{,}6138 \cdot \sin 35^\circ = 2{,}646\,\mathrm{m}$$

Probe:

$$\frac{b}{6{,}00} = \frac{\sin 35^\circ}{\sin 95^\circ}$$

$$b = 6{,}00 \cdot \frac{\sin 35^\circ}{\sin 95^\circ} = 3{,}4546\,\mathrm{m}$$

$$h = 3{,}4546 \cdot \sin 50^\circ = 2{,}646\,\mathrm{m} \rightarrow \text{i.O.}$$

9.2 Aufgaben

A9.1. Sie haben zwei Möglichkeiten, um von A nach C zu gelangen:

(I) Zunächst von A nach B entlang einer Strecke L_1 und dann senkrecht dazu von B nach C entlang einer Strecke L_2.

(II) Direkt diagonal von A nach C.

Es gilt: $L_2 = c \cdot L_1$ und $0 \leq c \leq 1$

a) Für $c = 0.8$: **Um** wieviel Prozent ist die Strecke II kürzer als die Strecke I.

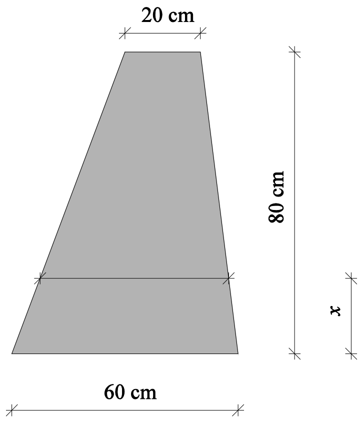
b) Für $c = 0.8$: **Um** wieviel Prozent ist die Strecke I länger als die Strecke II.

c) Berechnen Sie das Längenverhältnis c, so dass sich durch II eine Verringerung der Distanz **auf** 85% ergibt (in Bezug auf I).

d) Berechnen Sie das Längenverhältnis c, so dass sich durch I eine Vergrößerung der Distanz **um** 15% ergibt (in Bezug auf II).

e) Für welches Längenverhältnis c ergibt sich der prozentual größte Streckenzuwachs bei Wahl von I (in Bezug auf II)? Lösung nur logisch begründen, nicht formal nachweisen. **Auf** wieviel Prozent wächst für dieses Längenverhältnis die Strecke I in Bezug auf die Strecke II an?

A9.2. Berechnen Sie die Lage x eines Schnittes, der die Fläche des gezeigten Trapezquerschnitts halbiert.

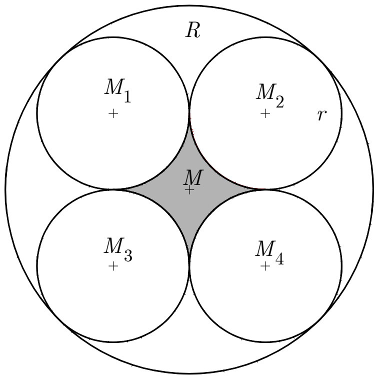


A9.3. Gegeben ist ein Kreis mit Radius R, dem vier kleine Kreise mit Radius r einbeschrieben sind.

a) Zeigen Sie, dass gilt: $r = \left(\sqrt{2} - 1\right) \cdot R$.

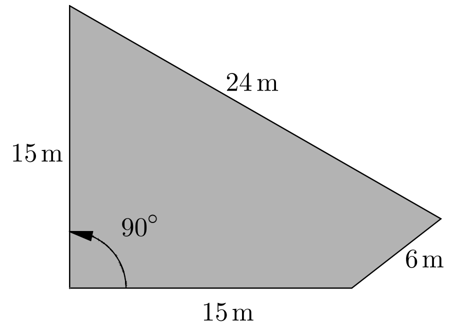
b) Berechnen Sie den Flächeninhalt und Umfang der schraffierten Fläche in Abhängigkeit von r.

c) Berechnen Sie für $R = 10cm$ die Fläche A, die wir erhalten, wenn wir aus dem großen Kreis die vier kleinen Kreise ausschneiden.

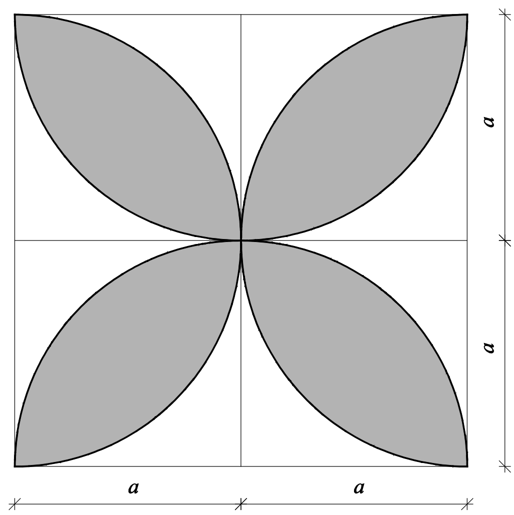


A9.4. Ein Parallelogramm, dessen Grundseite doppelt so groß ist wie seine Höhe, hat einen Flächeninhalt von 50 cm^2 und einen Umfang von 32 cm. Berechnen Sie die Seitenlängen und die Höhe des Parallelogramms sowie den Winkel α in Grad.

A9.5. Berechnen Sie den Flächeninhalt des gezeigten Vierecks.



A9.6. Berechnen Sie Inhalt und Umfang der grau angelegten Fläche.



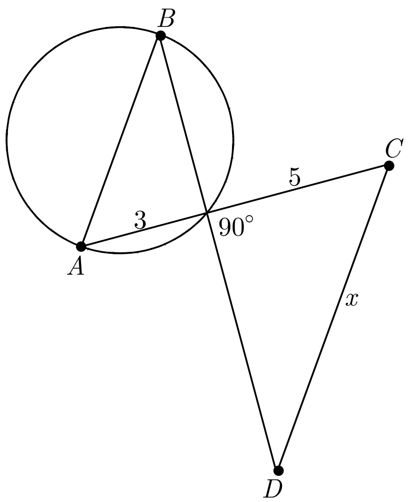
A9.7. Bestimme die Abmessungen eines Rechtecks, dessen Länge 3 m größer ist als seine Breite und dessen Umfang vom Zahlenwert der Fläche entspricht.

A9.8. Ein Halbkreis der Fläche $A = 32\pi\ cm^2$ ist in ein Rechteck eingeschrieben, so dass der Durchmesser des Halbkreises der Länge des Rechtecks entspricht. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Rechtecks.

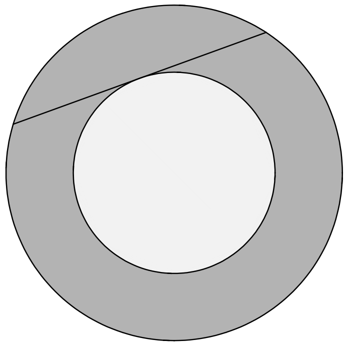
A9.9. AB und CD sind parallel (siehe Skizze).

a) Zeigen Sie, dass AB der Durchmesser des Kreises ist.

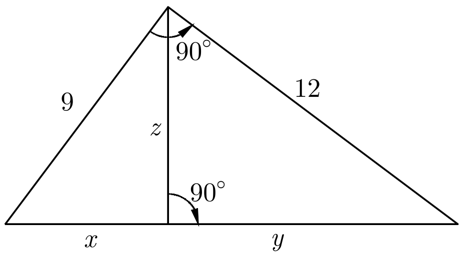
b) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Kreises als Funktion von x.



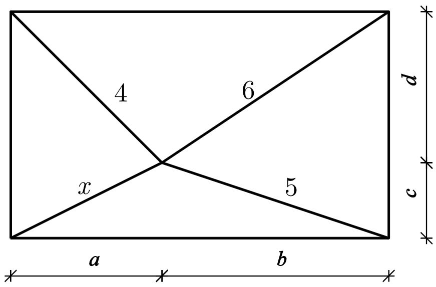
A9.10. Zwei Kreise sind konzentrisch. Die gezeigte Strecke (Sehne durch den großen Kreis, tangential zum kleinen Kreis) beträgt 20 cm. Wie groß ist die gekennzeichnete Fläche?



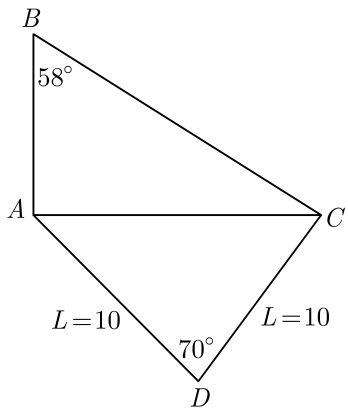
A9.11. Berechnen Sie die Längen x, y, z im gezeigten rechtwinkligen Dreieck.



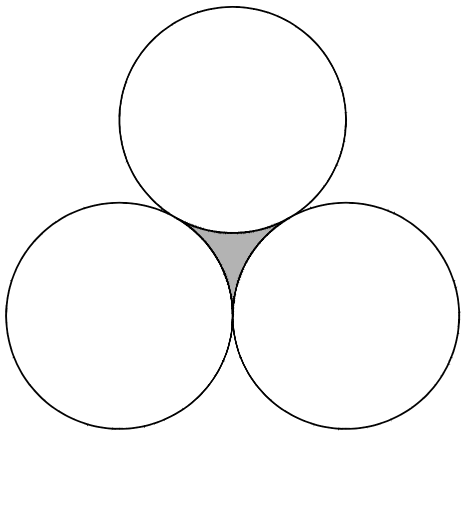
A9.12. Berechnen Sie x im gezeigten Rechteck.
Tipp: Unterteilen Sie das Rechteck in vier Rechtecke und wenden Sie den Satz des Pythagoras an.



A9.13. Bestimmen Sie die Länge AB. AB und AC sind senkrecht zueinander.



A9.14. Drei Kreise mit Radius r sind wie gezeigt angeordnet. Berechnen Sie den Inhalt der schattierten Fläche als Funktion von r.
Tipp: Verbinden Sie die drei Mittelpunkte zu einem gleichseitigen Dreieck.



10 Prüfung zum Mathematikvorkurs

10.1 Vor der Prüfung

Bereiten Sie sich auf die Prüfung mithilfe der Aufgaben in diesem Skript vor. An diesen Aufgaben werden sich die Prüfungsfragen orientieren. Selbstverständlich ist es erlaubt und auch sinnvoll mehr als die hier behandelten Aufgaben zu lösen.

Der Mathematikvorkurs wird als elektronische Prüfung geprüft. Das heißt, dass Sie sich an einem Rechner der Hochschule mit Ihren Zugangsdaten (campusID) einloggen. Studierende, die noch keine campusID haben (weil Sie z.B. noch nicht vollständig immatrikuliert sind) müssen sich in der ersten Woche des Vorkurses per E-Mail anmelden. Die Prüfung kann dann ausnahmsweise auf Papier geschrieben werden.

Die Prüfung wird in den Räumen des Labors für Informatik im Bauwesen durchgeführt. Aller Voraussicht nach wird es zwei Prüfungen geben. Zu welcher Uhrzeit Sie eingeteilt sind erfahren Sie vorab über die ILIAS Lernumgebung.

Am Prüfungstag kommen Sie bitte rechtzeitig zur Hochschule und beachten bitte die Informationen der Aufsichten. Sie müssen sich an Ihrem Platz nicht wohnlich einrichten. Außer Stift, Schmierpapier für Nebenrechnungen, Geodreieck/Lineal, und Ihrer MultiCa (Studierendenausweis zur Identifikation) muss nichts auf dem Platz sein. Auch kein Taschenrechner, Formelbuch oder Skript.

10.2 Während der Prüfung

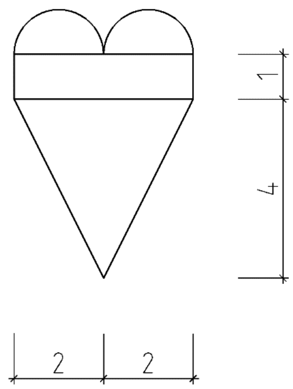
Die Bearbeitungszeit der Prüfung beträgt 60 Minuten. Es sind keine Hilfsmittel zugelassen! Auch kein Formelblatt oder Taschenrechner. Sie lösen die Aufgaben ggf. auf mitgebrachtem Schmierpapier, das Endergebnis oder die Lösung tragen Sie am PC in die Lösungsfelder ein. Alle Eingaben sind mit einer normalen Computertastatur möglich. Sie müssen keine Wurzelsymbole o.ä. eingeben.

Sie können Fragen überspringen, wenn Sie spontan keine Lösungsidee haben. Übersprungene Fragen werden an das Ende des Tests verschoben und werden somit automatisch wieder angezeigt.

Sie lösen alle Aufgaben selbständig. Unterhaltungen mit anderen Studierenden sind genauso untersagt wie abgucken, was auf den benachbarten Bildschirmen steht. Das gilt bei dieser elektronischen Prüfung genauso wie bei jeder anderen Klausur!

10.2.1 Beispielaufgaben

A10.1. Berechnen Sie den Flächeninhalt der folgenden Fläche:



A10.2. Bestimmen Sie die Stammfunktion des unbestimmten Integrals
$\int e^x + x\,dx$

A10.3. Vereinfachen Sie soweit wie möglich:

$$7u - (5u - 3v) - \big((10u - 7v) - (8u - 5v)\big)$$

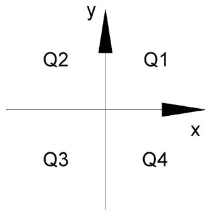
A10.4. Ein Parallelogramm, dessen Höhe einem Drittel der Grundseite entspricht, hat einen Flächeninhalt von 27 cm^2. Geben Sie die Länge der Grundseite und die Höhe des Parallelogramms an.

A10.5. Sie sollen eine Gebäudelänge von 11,50 m auf einem Plan mit Maßstab 1:250 zeichnen.
Wie lang ist die gezeichnete Linie?

A10.6. Vereinfachen Sie $\sqrt{\frac{x^2 \cdot y^3}{y^4}}$

A10.7. Welchen Höhenunterschied überwindet eine Straße mit 15% Steigung auf einer Horizontalstrecke von 500m?

A10.8. Welcher Quadrant des Koordinatensystems enthält keine Punkte der Geraden mit der Gleichung $y = -3{,}5x + 4$



(A) Q1 (B) Q2 (C) Q3 (D) Q4 (E) Die Gerade verläuft durch alle Quadranten

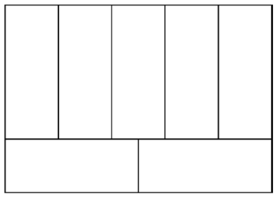
A10.9. Lösen Sie die folgende Gleichung: $\frac{|x-1|}{x+2} = 3$

A10.10. Fassen Sie zusammen: $(8w + 3d) \cdot (8w - 3d)$

A10.11. Berechnen Sie: $\frac{13}{12} + \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{3}\right)$

A10.12. Ein Auto fährt 36 Km/h, welche Strecke (in Metern) hat es in 10 Sekunden zurückgelegt?

A10.13. Ein großes Rechteck ist wie abgebildet aus 7 identischen kleinen Rechtecken zusammengesetzt. Die längere Seite der kleinen Rechtecke ist 15 cm lang. Welchen Flächeninhalt hat das große Rechteck?

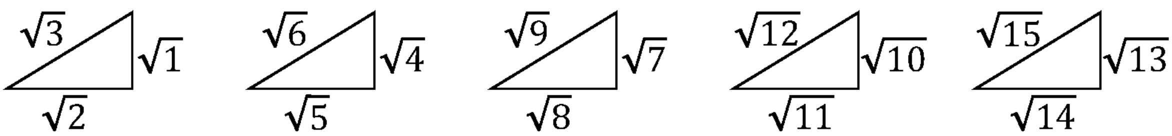


A10.14. In eine Kiste mit den Maßen 0,80 m * 1,20 m * 1 m werden Pflastersteine mit den Maßen 20cm*20cm*10 cm verpackt. Wie viele Steine passen in die Kiste?

A10.15. Lösen Sie die Ungleichung: $(2x + 1)(3x - 1) \leq 0$

A10.16. Markieren Sie alle rechtwinkligen Dreiecke:

(A) (B) (C) (D) (E)

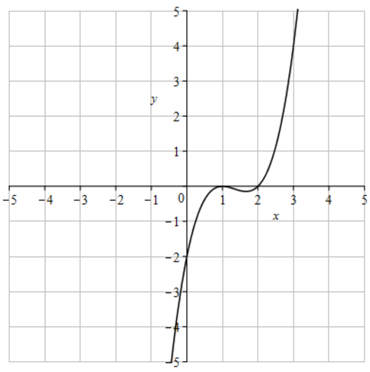


A10.17. Betrachten Sie die Funktion $f(x) = \frac{2\sin x}{2x+1}$. Berechnen Sie die erste Ableitung $f'(x)$.

A10.18. Geben Sie den Winkel 60° im Bogenmaß an.

A10.19. Nennen Sie alle Nullstellen der Funktion $f(x) = \ln x$

A10.20. Welche der folgenden vier Funktionsgleichungen beschreibt den gezeigten Funktionsverlauf?
Kreuzen Sie die richtige Lösung an!



- ☐ $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$
- ☐ $g(x) = -x^3 + 3x^2 - x$
- ☐ $h(x) = 2x^3 + x^2 - x + 1$
- ☐ $i(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2$

10.3 Nach der Prüfung

Wenn Sie mit der Bearbeitung fertig sind bleiben Sie bitte ruhig an Ihrem Platz sitzen. Nach Ablauf der Bearbeitungszeit bitten wir Sie noch einen Fragebogen auszufüllen. Dieser Fragebogen hat nichts mit Ihrer Prüfungsleistung zu tun. Er ist eine anonyme Umfrage zum Mathematikvorkurs.

Solche Umfragen (Evaluationen) werden Ihnen im Laufe des Studiums regelmäßig begegnen. Die Lehrenden bekommen eine statistische Auswertung über die Evaluation und können somit ggf. die Lehre für den nächsten Jahrgang anpassen. Sie können darin auch Lob oder Kritik äußern.

Ihre Prüfungen werden anschließend korrigiert und bewertet. Wie lange das dauert lässt sich im Vorfeld nicht genau sagen, meistens werden ein bis zwei Arbeitstage benötigt. Nach der Korrektur erhalten Sie die Ergebnisse über die ILIAS Lernumgebung. Dort finden Sie Ihre erreichten Punkte in der Prüfung zur Selbsteinschätzung. Die richtigen Ergebnisse werden nicht veröffentlicht.

Auch, wenn Sie vielleicht sehr gut in der Prüfung abgeschnitten haben heißt das aber nicht, dass Sie sich auf Ihrer Leistung ausruhen können. Bleiben Sie am Ball und bereiten Sie den Unterrichtsstoff stets zeitnah nach!